

DOI 10.54596/2309-6977-2022-2-40-49**УДК 514****МРНТИ 01.01.04****МЕКТЕП ОҚУШЫЛАРЫН СТЕРЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУГЕ
ҮЙРЕТУДІҢ КЕЙБІР ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ****Жакилова С.О.**

(e-mail: kunninkozi@gmail.com)

*Сулейман Демирель атындағы университет, Қаскелең қ., Қазақстан***Аңдатпа**

Мақалада геометриялық денелерге қатысты стереометриялық есептерді шығарудың кейбір әдістемелік аспектілері қарастырылған. Көпжақтар мен айналу денелеріне арналған стереометриялық есептер геометрия пәнінен жоғары сынып бағдарламасының соңғы бөлімінде үйретіледі. Жаратылыстану-математика бағытындағы және профильдік сыныптарында оқытын оқушылар үшін аса маңызды тақырыптардың бірі болып саналады. Мақала 10-11 сынып білім алушыларының деңгейінде геометрия пәнін оқытуға арналған бірнеше ерекшеліктердің әдістемелік негіздерінің таныстырылымы болып табылады. Берілген мақалада ҰБТ-да стереометриялық есептердің шықпауына әкеліп соғатын (теориялық білімнің әлсіздігі, мектеп оқулығында бір типті есептердің жиілігі) және қиындық туғызатын (кеңістікте елестету қабілетінің әлсіздігі) мәселелер қарастырылды. Білім алушылардан ҰБТ уақытында қандай есептерге көңіл бөледі, стереометрия бөліміне арналған және басқа есептерді шығару бойынша сауалнама алынды. Сауалнамадағы жауаптарды талдау кезінде ҰБТ уақытында стереометрия есептерін шығаруда уақыт аз бөлінетіндігі немесе мүлде бөлмейтіндігі анықталды. Стереометриялық есептерді шығаруды үйретуде, кеңістікте елестету қабілетін жетілдіруге және өзіндік білімін шыңдауға және есеп шығару дағдысын дамытуға сабақ үстінде көрнекі құралдардың, мультимедиялық технологиялардың қолдануы және есеп шығаруда әр түрлі әдістердің қарастырылуы есептің оңай әрі тиімді жолмен шығуына жалпы оң қабылдауын көрсетті.

Түйінді сөздер: планиметрия, стереометрия, көпжақтар, айналу денелері, диагональдік кима, аудан, көлем.

**НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ
ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ****Жакилова С.О.**

(e-mail: kunninkozi@gmail.com)

*Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан***Аннотация**

В статье рассмотрены некоторые методические аспекты обучения учащихся школ решению стереометрических задач, связанных с геометрическими телами. Стереометрические задачи на многогранники и тела вращения изучаются в последних разделах программы старших классов по геометрии и считаются одной из наиболее важных тем для учащихся естественно-математического направления и профильных классов. Произведен анализ условий, приводящих к неспособности учащихся решать стереометрические задачи на ЕНТ (слабые теоретические знания, частота однотипных задач в школьном учебнике) и вызывающие затруднения при решении стереометрических задач (слаборазвитая способность пространственного воображения). Приведены результаты анкетирования учащихся и анализ ответов, в которых установлено, что во время подготовки к ЕНТ мало времени отводится или вообще не выделяется на решение задач стереометрии. Использование наглядных пособий, мультимедийных технологий на занятиях по обучению решению стереометрических задач, совершенствованию пространственного воображения и развитию навыков решения задач, а также рассмотрение различных методов решения задач показали общее положительное восприятие изучению методов решения задач.

Ключевые слова: планиметрия, стереометрия, многогранники, тела вращения, задачи, диагональное сечение, площадь, объем.

SOME METHODOLOGICAL FEATURES OF TEACHING SCHOOLCHILDREN TO SOLVE STEREOMETRIC PROBLEMS

Zhakilova S.O.

(e-mail: kunninkozi@gmail.com)

Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan

Abstract

The article deals with some methodological aspects of teaching school students to solve stereometric problems related to geometric bodies. Stereometric problems on polyhedra and bodies of rotation are studied in the last sections of the high school geometry program and are considered one of the most important topics for students of the natural-mathematical direction and specialized classes. The article is an introduction to the methodological foundations of a number of features for studying the subject of geometry at the level of students in grades 10-11. The article deals with the issues that lead to the inability to solve stereometric problems at the UNT (weakness of theoretical knowledge, the frequency of similar problems in a school textbook) and cause difficulties (weak ability to represent in space). Among the students, a survey was conducted on which tasks they first pay attention to during the UNT in the section of stereometry and in solving other problems. When analyzing the answers in the questionnaire, it was found that during the UNT, little or no time is allocated when solving problems of stereometry. The use of visual aids, multimedia technologies in the classroom for teaching the solution of stereometric problems, improving spatial imagination and self-education and the development of problem-solving skills, as well as the consideration of various methods of problem solving, showed a general positive perception of the problem in an easy and effective way.

Keywords: planimetry, stereometry, polyhedra, bodies of rotation, problems, diagonal section, area, volume.

Кіріспе

Кез-келген есепті шығару нәтижесі ББД (білім, білік, дағды) - ға тәуелді, яғни білім алушының есепке қатысты формулаларды, теориялар мен қажетті анықтамаларды білу қажеттілігі, сұрыптай алуы, ақпараттың негізгісін негізгісі емесінен және маңыздысын маңызды емесінен дұрыс айыра білуі және кеңістікте елестетуі, логикалық ойлау деңгейінің дамуымен тікелей байланысты. Геометриялық есептер логикалық ойлауды, яғни ұғымдарды, логикалық байланыстарды пайдалануға тіреледі, соның ішінде стереометриялық есептер білім алушылардың кеңістіктік түсініктері мен елестетуін (практикалық тұрғыдан) қалыптастырады және дамытады, объектілердің кеңістіктік қасиеттері мен қатынастарын ажырата білу және оларды мәселені шешу процесінде қолдана білу қабілетін қалыптастырады. Геометрия курсынағы есептерден планиметриялық есептер білім алушыларға оңай тисе, стереометрия бөлімдегі есептер оқушыларға біршама қиындықтар туғызып, білім алушының стереометриялық есептер шығаруға деген мотивациясын жоққа шығарып, стереометриялық есептерді шығармай сол күйі тастап кетуге алып келуі мүмкін. Сол стереометриялық есептерді шешу есептерді шығарудың әр кезеңдерінің логикалық байланысын түсіне отырып, нақты және жүйелі ойлануды қажет етеді және мұғалімнің мақсаты, осы қадамдарды білім алушы бойына сіңдіру [1]. Стереометриялық есептерді шығару барысындағы кемшіліктердің алдын алу үшін жасалу қажет қадамдарды көрсету мақсатында стереометриялық есептерді шешуді оқытудың әдістерін қарастырдық. Егер де планиметрия бөлімі есептерінің шешімін табуда көптеген білім алушыларда еш кедергі болмаса, алынған сауалнама көрсеткендей, стереометрия бөлімінен алынған есептер көптеген білім алушыларға бірқатар қиындық туғызады.

ҰБТ - да негізінен параллелепипедке, пирамидаға, призмаға, конус пен цилиндрге және түзу мен жазықтық, жазықтық пен жазықтық арасындағы бұрыштарды, сонымен

қатар аудан мен көлемді есептеуге берілетін орта деңгейдегі есептер кездеседі. Мұндай есептерді шығару үшін ең алдымен, стереометрия формулаларын білумен қатар, сызбаны дұрыс сала білу шарт. Екінші жасалынатын амал, ол есепті алғаш ойымызға келген тәсілден гөрі, есептің басқа қарапайым жеңіл әдісін табуға назар аудару керек. Бұл білім алушыға уақыт үнемдеуге көмектеседі. Стереометрияға қатысты есептерде планиметрия бөлімінде қарастыратын фигуралардың (үшбұрыш, тіктөртбұрыш не болмаса шеңбер болсын), жеке есепке байланысты, осы фигуралардың белгілі бір қасиетін есептің шешімін табу үшін көптеген қасиеттерін пайдаланамыз. Геометриялық есептеулерде қолданылатын базалық алгоритмдер (Пифагор теоремасы, косинустар теоремасы, синустар теоремасы және т.б.) мен ережелер де өздерінің қолданысын осы курстан бастау алады. Оған қоса, жоғарыда айтып өткен теоремалардан бөлек, үшбұрыштардың теңдік белгілері, ұқсастық белгілері - әртүрлі геометриялық тұжырымдарды дәлелдеулерде, планиметриялық есептерді және стереометриялық есептерді шығаруда кеңінен қолданылады. Есептің шешемін іздестіруге бағыт-бағдар беруге көмектесетін планиметрия мен стереометрияға қатысты бірнеше анықтамаларды, теоремаларды, тұжырымдамалармен байланысты оқушылардың жиі жіберетін қателіктерін қарастырайық:

- оқушылар теоремалардың тұжырымдарын білмейді (Пифагор теоремасы, Синустар теоремасы және косинустар теоремасын және т.б.) және оларды есептерді шешкенде, әсіресе стереометрия курсына қолдана алмайды;
- білім алушылар сырттай және іштей сызылған шеңбердің центрі не болып табылатынын білмейді;
- фигураның ішкі, және әсіресе сыртқы облысынан қосымша салуларды сыза алмайды;
- үшбұрыштың теңдік/ұқсастық белгілерін пайдалана алмайды;
- жазықтықта (кеңістікте) фигураларды дұрыс бейнелеуді білмейді;
- стереометрияда жіберілетін көптеген қателіктердің негізі кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы туралы сұрақтарды білмеу болып табылады (әсіресе түзудің арасындағы бұрыш туралы мәселе және жазықтықтар арасындағы бұрыш туралы мәселе);
- стереометриялық есептерді шешуде тригонометрияны қолдана алмайды;
- көпбұрыштар мен айналу денелерінің қималарын қалай құру керектігін/ауданын табуы білмейді;
- есеп шарты бойынша геометриялық денені және оның элементтерін сызу кезінде олар оқулықтың суреттері мен сызбаларына еліктеуге тырысады, бірақ жаңа жағдайда үш өлшемді фигураның сызбасын салуда үлкен қиындықтарға тап болады;
- кеңістік елестетуінің, әсіресе іштей және сырттай сызылған көпжақтар мен айналу денелерінің орналасуын сызуда нашар дамуы және дұрыс жетілмеуі;
- планиметрия/стереометрия бөлімінде қарастырылатын фигуралардың ауданын/көлемін табуға арналған формулаларды білмейді [2, 9-10 бб]. Жоғарыда айтылып өткен мәселелердің бар екендігін, 11 сынып оқушыларынан алынған сауалнама растайды.

Сауалнама нәтижесі. Математика пәнінен "Стереометрия" бөлімі бойынша 11 сынып білім алушыларына арналған сауалнама

Кесте 1

Сұрақтар № Жауап	Пифагор т.-ын білесіз бе?		Косинустар т.-ын білесіз бе?		Сиинустар т.-ын білесіз бе?	
Бірінші рет естіп тұрмын	2,9%	1	5,7%	2	5,7%	2
Теоремамен таныспын, алайда қолдана алмаймын	5,7%	2	11,4%	4	17,1%	6
Теоремамен таныспын және қолдана аламын	91,4%	32	82,9%	29	77,1%	27

Кесте 2

Сұрақтар № Жауап	ҰБТ тапсырмалары арасында келген стереометрияға қатысты есептерді...		Көпжақтарға қатысты есептерді...		Айналу дене-леріне қатысты есептерді...	
Міндетті түрде шығаруға тырысамын	45,7%	16	60%	21	62,9%	22
Мүлдем шығармай, өткізіп жіберемін	5,7%	2	2,9%	1	8,6%	3
Уақыт қалып жатса, қараймын, яғни соңына қалдырамын	14,3%	5	20%	7	11,4%	4
Шығарып, шығармауым есеп күрделілігіне байланысты / есеп түріне қарап қиын сияқты көрінсе, көбіне өткізіп жібере саламын	34,3%	12	17,1%	6	17,1%	6

Кесте 3

Сұрақтар № Жауап	Параллеле пипедке қатысты есептерде		Призмаға қатысты есептерде		Пирамидаға қатысты есептерде		Қиық пирамидаға қатысты есептерде	
Фигураға қатысты формулан білмеймін/білемін, бірақ қолдана алмаймын	20%	7	28,6%	10	37,1%	13	28,6%	10
Фигураның б. б./т. б. ауданын/көлемін табу қиыншылық туғызады	5,7%	2	11,4%	4	8,6%	3	25,7%	9
Фигураның диагональдік қимасының сызбасын салу/ауданын т. қ. т.	8,6%	3	8,6%	3	11,4%	4	0%	0
Берілген фигураға қатысты есептер қиындық туғызбайды	48,6%	17	28,6%	10	34,3%	12	34,3%	12
Басқа жауап (басқа не бірнеше қиындықтар бар болса)	17,1%	6	22,9%	8	8,6%	3	11,4%	4

Кесте 4

Жауап \ Сұрақтар №	Цилиндрге қатысты есептерде		Конусқа қатысты есептерде		Қиық конусқа қ. е.		Шарға (сфераға) қ. е.	
Фигураға қатысты формуланы білмеймін/білемін, бірақ қолдана алмаймын	25,7%	9	22,9%	8	28,6%	10	34,3%	12
Фигураның табан/б. б./т. б. ауданын/көлемін табу қиыншылық туғызады	5,7%	2	20%	7	17,1%	6	2,9%	1
Фигураның (осьтік) қимасының ауданын т. қ. т.	2,9%	1	5,7%	2	14,3%	5	14,3%	5
Берілген фигураға қатысты есептер қиындық туғызбайды	51,4%	18	42,8%	15	25,7%	9	28,6%	10
Басқа жауап (басқа не бірнеше қиындықтар бар болса)	14,3%	5	8,6%	3	14,3%	5	20%	7

Кестелерде көрсетілген нәтижелер білім алушылардың стереометрия бөлімін оқуда көп білімді меңгеру қиынға соғатыны анықталды. Тіптен, кейбірі, аты шыққан теоремаларды естімегендіктері анық болды. Сауалнама алынған білім алушылардың орта шамамен 50%-ға жуығы ғана стереометриялық есептерді еш кедергісіз шығара алады.

Оқушылардың жалпы геометриялық, атап айтқанда, стереометриялық есептерді шешу қабілетінің қалыптасуының төмен деңгейі болуының себептерін үш топқа бөлуге болады:

1) психологиялық факторларға байланысты себептер (психикалық функциялардың әлсіреуі: зейін, есте сақтау, ойлау).

2) оқу бағдарламалары мен оқулықтардың кемшіліктерінен (ақпараттың толыққанды берілмеуі, бір типті есептердің жиілігі және т.б.) туындайтын себептер.

3) оқу процесін ұйымдастырудың жетілмегендігіне байланысты себептер.

Оқушыларға есептерді, соның ішінде стереометриялық есептерді шешуге үйрету бойынша оқу процесін ұйымдастыру кезінде оқырманға осы процесте оқушылардың таным қозғалысының төрт формасы бар екенін еске салу керек:

а) кейбір сезімдік бейнелерден басқаларына (сезімдік таным);

б) бір ұғымнан екінші ұғымға (логикалық таным);

в) бейнелерден ұғымдарға (сезімдік және логикалық танымның өзара әрекеті);

г) ұғымдардан бейнелерге (логикалық және сенсорлық танымның өзара әрекеті) [2, 12].

Планиметриядан стереометрияны зерттеуге көшу білім алушыларға үлкен қиындықтар туғызады және ол бұл бөлімде ұқсас/не бұрын болған алгоритмдердің жоқтығы (кез-келген мәселе және теоремалар жаңа болып дәлелденеді) және оқушылардың кеңістіктік елестетуінің толыққанды жетілмеуімен байланысты. Стереометрия курсы толығымен планиметрия курсына негізделген. Курстың көптеген есептері планиметриялық есептерді шешуге тіріледі, сәйкесінше, планиметрияны зерттеуде орын алған барлық кемшіліктер стереометрияны зерттеуде де сезіледі. Сондықтан стереометрияны сәтті зерттеу үшін мұғалім планиметриялық материалға үнемі оралып отыруы керек; белгілі бір теореманы зерттемес бұрын қажетті

планиметриялық ақпаратты қайталау қажет. Стереометриялық есептерді есептеудің негізгі әдісі – *алгебралық әдіс* болып табылады.

Алгебралық және тригонометриялық сәйкестіктер мен теңдеулер қолданылады. Әр мәселені шешудің бастапқы кезеңіне назар аудару керек-шешім барысы жоспарланған кезде талдау, көбінесе дұрыс жол бірден емес, бірқатар сәтсіз әрекеттерден кейін табылуы мүмкін. Ең бірінші амал, ол сызбаны дұрыс сызу. Сызбаны аяқтағаннан кейін деректер мен фигураның белгісіз элементтері арасындағы байланыстарды мұқият зерттеп, оларды аралық шамалар тізбегімен байланыстыруға тырысу керек. Мысал қарастырайық.

Мысал 1. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі ұзындығы a болатын табан қабырғасына тең. Табан қабырғасы арқылы өтіп қарама қарсы қабырғасына перпендикуляр болып келетін пирамиданың қима жазықтығының ауданын табыңыз [3, 7-10 бб]. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың сызбасын GeoGebra немесе 3D studio MAX және т.б. бағдарламалардың көмегін интерактивті тақтаны пайдаланып сызамыз және білім алушының сұрақтары болған жағдай қолдау көрсетеміз. Бұл білім алушының кеңістікте елестету қабілетін дамытады және жақсартады. Ол енді, есепті шығарайық.

Шешуі. NH – $NABC$ пирамидасының биіктігі болсын. BCL – AN қабырғасына жүргізілген перпендикуляр қима жазықтығы. Пирамида дұрыс болғандықтан, ABC дұрыс үшбұрышының центрі H . BCL үшбұрышы тең бүйірлі. Оның KL биіктігін табу үшін AK , AH , AN кесінділерінің ұзындықтарын анықтау жеткілікті. ABC дұрыс үшбұрыш және $AB = a$, дұрыс үшбұрыш сол себепті $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = \frac{2}{3}AK = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ (сырттай сызылған шеңбердің радиусы) екендігін оңай есептеп аламыз. AHN үшбұрышынан Пифагор теоремасы бойынша келесі теңдікті аламыз:

$$AN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

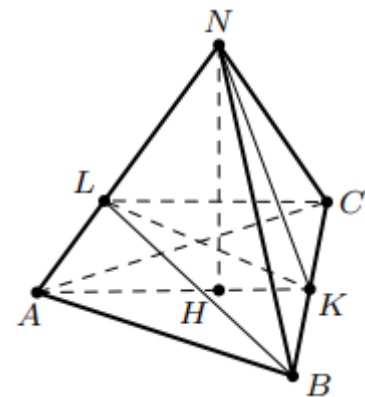
Кейін, AKN үшбұрышының ауданын екі түрлі әдіспен өрнектеп, аламыз:

$$KL = \frac{AK \cdot NH}{AN}$$

Табылған мәндерді орнына қойып, $KL = \frac{3}{4a}$ анықтаймыз. Бұдан BCL үшбұрышының ауданы

$$S = \frac{3}{8}a^3.$$

Бұл есепті шығару барысында кезінде қадамдап/кезеңдеп есептеу немесе тікелей есептеу әдісі деп аталатын әдісті қолдандық. Бұл алгебралық әдістің бір түрі болып табылады. Кезеңдеп шешумен аралық шамалар дәйекті түрде есептеледі, олардың көмегімен қажетті шамалар деректермен байланысады. Есеп шешілгеннен кейін, шешімнің дұрыстығына көз жеткізіп, есепті шешіміне әкелетін қысқа жолды табуға тырысу керек. Көрсетілген шешімді қарастыратын болсақ, BCL үшбұрышының KL биіктігін басқа жолмен анықтауға болатынын байқаймыз. KL кесіндісі AKL тікбұрышты үшбұрышының катеті болып табылады. Оның гипотенузасы $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, AN көлбеу бүйір қабырғасының табан жазықтығы арасындағы a бұрышын табуға болады. Осылайша, есептің осындай шешіміне келеміз. AHN үшбұрышынан $NH = a$ және



Сурет 1

$АН = \frac{a}{\sqrt{3}}$ болғандықтан, $tga = \frac{NH}{AH}$ табамыз. $tga = \sqrt{3}$ және $\alpha = 60^\circ$ екендігі анықталды. AKL үшбұрышының

$$KL = AK \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a.$$

Бұдан,

$$S = \frac{3}{8}a^3.$$

Бұл шешімді тағы да шамалы жеңілдетуге болады, егер де BCL үшбұрышы ABC үшбұрышының BCL жазықтығына ортогональ проекциясы екендігін байқасақ, сол үшін

$$S = S_{ABC} * \cos \beta,$$

Мұндағы, $\beta = \angle AKL$ – BCL мен ABC жазықтықтары арасындағы екіжақты бұрыштық сызықтық бұрышы.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ және } \beta = 30^\circ \text{ болғандықтан,}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * \cos 30^\circ = \frac{3}{8}a^2.$$

Есепті екінші әдіспен шығару барысында, біз дұрыс үшбұрышты пирамиданың қасиетін білдік: егер де дұрыс үшбұрышты пирамиданың биіктігі табан ұзындығына тең болатын болса, пирамиданың бүйір қабырғасы мен табан жазықтығы арасындағы бұрыш 60° тең болады. Есепті үшінші әдіспен шығару барысында біз көпбұрыштың жазықтыққа ортогональ проекциясының ауданы туралы теореманы қолдандық.

$$S_{пр} = S * \cos \varphi,$$

Мұндағы, S – берілген көпбұрыштың ауданы, $S_{пр}$ – оның жазықтыққа проекциясының ауданы, φ көпбұрыш жазықтығымен оның проекциясының арасындағы бұрыш. Бұл теореманың дәлелдеуін геометрия оқулықтарынан табуға болады. Формула пирамиданың бүйір бетінің ауданын және көпжақтардың қималарының ауданын есептеуге келетін кейбір есептерге қолданысын табады. Мысалда көрсеткендей, кейбір жағдайда, белгілі элементтерден белгісіз элементтерге апаратын амалдар бірнешеу болуы мүмкін және бір есеп бірнеше жолмен, әртүрлі әдіспен шығуы мүмкін. Әрине, сол амалдардың ішінде бізге оңай және уақыт жағынан тиімді болатынын таңдауға талпыну керек. Атақты математик Д. Пойа өзінің «Есепті қалай шығару керек?» кітабында былай деп жазған: «Екі дәлел бір дәлелден қарағанда жақсы. Мақалда айтылғандай: Екі зәкірде тұрған сенімдірек». Стереометриялық есептерді шешуде тригонометриялық функциялар да жиі қолданылады. Кей жағдайларда, стереометриялық есептің шешімі жеңілдетіледі, егер алгебралық емес, тригонометриялық теңдеу құрайтын болсақ. Келесі мысалды қарастырайық.

Мысал 2. $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың табаны тең бүйірлі тікбұрышты үшбұрыш. $AC = CB = \sqrt{6}$ жазықтығы табан жазықтығымен 60° бұрыш жасайды. Призманың көлемін табыңыз [4].

Тік призманың сызбасын GeoGebra немесе 3D studioMAX және т.б. бағдарламалардың көмегін интерактивті тақтаны пайдаланып оқушы ешкімнің қолдауынсыз өзі сызады. Бұл білім алушының кеңістікте елестету қабілетін ода әрі жетілдіреді және есепті өз күшімен шығара алатындығына сенімділік береді. Сызбаның дұрыстығына көз жеткізгеннен кейін, есепті шығаруға көшейік.

Есеп шығарудың алдында оқушылармен келесі мәліметтерді қайталап, талдап өткен жөн болады.

1. Үш перпендикуляр туралы теореманы еске түсіреміз (түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы)

2. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің өзара қатынасы қандай тригонометриялық қатынасты береді? ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$)

3. Призманың көлемі қалай табылады? ($V = S_{\text{таб}} * H$)

Шешуі:

1) Есеп шарты бойынша екіжақты бұрыштық сызықтық бұрышы C_1DC бұрышы болып табылады. Мұнда D нүктесі AB қабырғасының орта нүктесі, өйткені $AC = CB$ олай болса CD – биіктік, Үш перпендикуляр теорема бойынша C_1D AB кесінділері перпендикуляр орналасқан.

2) $AB = AC\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ Екенін байқаймыз, байқамаған жағдайда Пифагор теоремасымен есептеп аламыз, ал $CD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}$.

3) 60° –тық бұрышы бар C_1DC тікбұрышты үшбұрышын қарастыра отырып, тікбұрышты үшбұрыштың катеттерінің өзара қатынасын теңдік аламыз. Одан C_1C –ді табамыз.

4) $C_1C = CD * \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} * \sqrt{3} = 3$.

5) Призманың көлемін есептейік.

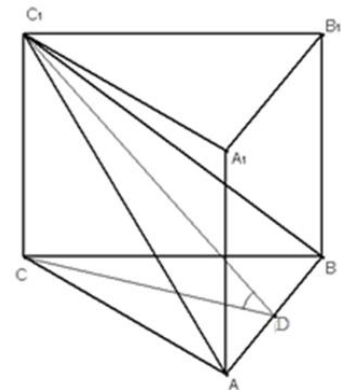
Формула бойынша: $V = S_{\text{таб}} * H = 3 * \frac{1}{2} * AC * CB * 3 * \frac{1}{2} \sqrt{6} * \sqrt{6} = 9$.

Айналу денелері тақырыбы көбіне білім алушыларға қиын тиеді. Бірақ айналу денелеріндегі тақырыптар әрқашан көптеген теореманы, формулаларды қажет етпейді. Тек қана есепті жүйелі түрде талдауды, планиметрия бөліміндегі кей ақпараттарды ғана қажет етеді.

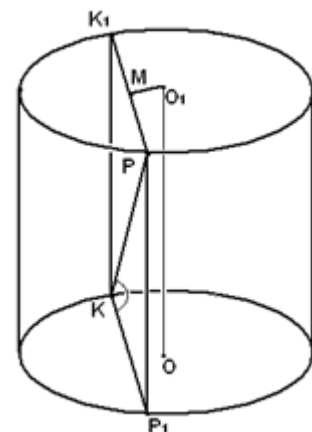
Мысал 3. KP кесіндісінің ұштары цилиндр табанындағы шеңберлерде жатыр. Цилиндрдің биіктігі 16 –ға, табан радиусы 10 –ға тең, ал KP түзуі мен табан жазықтығы 45° бұрыш жасайды. Цилиндрдің осінен K және P нүктелері арқылы өтетін оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықты табыңдар.

Цилиндрдің сызбасын GeoGebra немесе 3D studioMAX және т.б. бағдарламалардың көмегін интерактивті тақтаны пайдаланып оқушы ешкімнің қолдауынсыз өзі сызады, сұрақтары бар болған жағдайда мұғалімнен жауап алады. Бұл бағдарламалар білім алушының кеңістікте елестету қабілетін ода әрі жетілдіреді және есепті өз күшімен шығара алатындығына сенімділік береді. Сызбаның дұрыстығына көз жеткізгеннен кейін, есепті шығаруға көшейік. Есеп шығарудың алдында оқушыларға келесі мәліметтерді қайталап, талдап өткен жөн болады. Цилиндрдің қимасы деп нені айтамыз? (тіктөртбұрыш)

Шешуі: Цилиндр осы қимаға параллель болғандықтан, осьтен қимаға дейінгі қашықтық түзудің кез келген нүктесінен жазықтыққа жүргізілген перпендикулярдың ұзындығына тең болады. Біздің жағдайда, O_1 нүктесін алған тиімді, онда O_1M кесіндісі - ізделінді перпендикуляр, мұндағы M нүктесі K_1P кесіндісінің ортасы. Цилиндр қимасы - тіктөртбұрыш және ол диагональ қабырғамен 45° бұрыш жасайды, демек қима ол –



Сурет 2



Сурет 3

квадрат. Енді бізге радиусы 10 —ға тең шеңбер центрінен ұзындығы 16 —ға тең хордаға дейінгі қашықтықты анықтау керек. Басқалай айтқанда, есеп O_1K_1P тең бүйірлі үшбұрышының биіктігін табуға тіреледі. Оның 6-ға тең екенін оңай есептеуге болады.

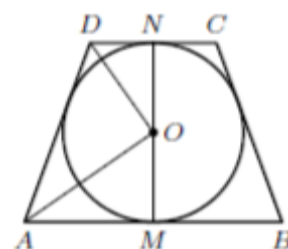
Енді стереометрияның орта деңгейден жоғары есептер жайлы айтатын болсақ, олар көбіне стереометриялық фактілерді талап етіп, соларға тіреледі, содан кейін есеп стандартты планиметриялық есептерге келеді. ҰБТ-ге келетін есептер арасында осындай есептер көбіне қарастырылмай тасталынып кетіледі.

Қарапайым геометриялық есептерді шығарғанда, жеңілдетілген сызбаны пайдаланса болады. Мысалға фигураның осьтік қимасының суреті жеткілікті болуы мүмкін.

Мысал 4. Радиусы r -ға тең сфераға сырттай жасаушысы l -ға қиық конус сызылған. Қиық конустың толық бетінің ауданын табыңыз.

Алдымен, GeoGebra, PowerPoint не 3D studioMAX және т.б. бағдарламалардың көмегін сызбасын сызайық.

Шешуі: Сфераның центрі қиық конустың негіздерінен бірдей арақашықтықта алшақтатылған және MN кесіндісінің ортасы O нүктесімен беттеседі. Қиық конустың қимасы трапеция болып келеді және ол шеңберге сырттай сызылған. Жаңа белгілер енгізейік:



Сурет 4

r_1 және r_2 қиық конустардың радиустары ($r_1 < r_2$), $S_{6.б.}$ - оның бүйір бетінің ауданы.

$S_{6.б.} = \pi(r_1 + r_2)l$ формуласын пайдаланайық. Шеңберге сырттай сызылған төртбұрыштың қабырғаларының қасиеті бойынша, $r_1 + r_2 = l$. Демек, $S_{6.б.} = \pi l^2$

AOM және DON үшбұрыштары ұқсас, сол себепті $\frac{r_1}{r} = \frac{r}{r_2}$, бұдан $r_1 r_2 = r^2$

Қиық конустың табандарының аудандарының қосындысын табайық:

$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)^2 - 2\pi r_1 r_2 = \pi(l^2 - 2r^2)$$

Осылайша, қиық конустың толық бетінің ауданы $S = \pi l^2 + \pi(l^2 - 2r^2)$

Бұдан, $S = 2\pi(l^2 - r^2)$.

Қорытынды

Геометриялық есептер әр түрлілігімен ерекшеленеді, сондықтан барлық есептерді шешуге нұсқау беру мүмкін емес. Есептерді шығару кеңістіктік елестетуді, планиметрия, алгебра және тригонометриядан теориялық білімді талап етеді. Стереометриялық есептерді шығаруды үйретуде, кеңістікте елестету қабілетін жетілдіруге және өзіндік білімін шыңдауға және есеп шығару дағдысын дамытуға сабақ үстінде көрнекі құралдардың, мультимедиялық технологиялардың қолдануы білім алушылардың өздігінен ешкімнің көмегінсіз сызба салуына оң әсерін тигізеді. Оған қоса, есепте шығаруда білім алушы негізгі әдістерді біле ғана қоймай, практикада қолдана алса, белгілі бір есепті шешкен кезде, оған есепті ұтымды шешуге мүмкіндік беретін жаңа әдісті немесе техниканы табу оңайға тиеді. Стереометриялық есептерді шешудің бірнеше әдіс-тәсілдері қарастырдық. Алгебралық әдіс, барлық дерлік есептерді шығаруда қолданылады. Себебі, барлық есептер теңдеу көмегімен шығарылады. Егерде есеп шартында бұрыш, не ізделінді элемент бұрыш болса, тригонометриялық функцияларды қолданбай шығару мүмкін емес. Одан бөлек, айтып өткендей тригонометрияны қолдану есеп шығару барысын жеңілдетеді. Стереометриялық есептерді нәтижелі түрде шығару үшін қарапайымнан жеңілге көшу жүйесі, мектеп бағдарламасы бекіткен кітаптардан бөлек қосымша ақпарат алып іздену ҰБТ тапсырушысы үшін өте маңызды.

Стереометриялық есептерді шығару үшін практикалық тұрғыдан көп уақыт бөлген жөн. Практика көп болған сайын, стереометриялық есептер еш қиындықтар туғызбайтын болады.

Әдебиет:

1. М.Д. Раманова. Геометриялық есептерді сызбасы бойынша жылдам шешудің тиімді жолдары. URL: <https://infourok.ru/geometriyali-esepterd-sizbasi-boyinsha-zhildam-sheshudi-tiimdi-zholdari-666160.html>.
2. В.А. Далингер. Есеп шығару арқылы стереометрияны оқыту әдістемесі: СПО-ға арналған оқу құралы. – 2 басылым, өзгерт. және толықт. – М.: Басылыс «Юрайт», 2017. - 9-13 беттер.
3. Э.Г. Готман. Стереометриялық есептер және оларды шешу әдістері. – М.: МЦНМО, 2006. – 7-11 бб.
4. А.А. Жалиева. Ұлттық бірыңғай тестілеудегі есептер. URL: <https://bilimdiler.kz/matematika/18584-ulttyk-biryngay-testileudegi-stereometriya-esepteri.html>.

References:

1. M.D. Ramanova. Geometriyalyk esepтерdi syzbasy bojnsha zhyldam sheshudіn tiimdi zholdary. URL: <https://infourok.ru/geometriyali-esepterd-sizbasi-boyinsha-zhildam-sheshudi-tiimdi-zholdari-666160.html>.
2. V.A. Dalinger. Esep shyғaru arkыly stereometriyany okytu әdistemesi: SPO-ға арналған оқу құралы. – 2 basylыm, өзgert. zhәne tolykt. – M.: Basylys «Yurajt», 2017. - 9-13 better.
3. E.G. Gotman. Stereometriyalyk esepтер zhәne olardy sheshu әdisteri. – M.: MCNMO, 2006. – 7-11 bb.
4. A.A. ZHalieva. Ұltyk biryңғaj testileudegi esepтер.URL: <https://bilimdiler.kz/matematika/18584-ulttyk-biryngay-testileudegi-stereometriya-esepteri.html>.