UDK 372.8
SCSTI 20.19.01

ABOUT SOME INTERPOLATION PROPERTIES OF FAMILIES OF FINITE DIMENSIONAL NET SPACES AND LORENZ SPACES RELATIVELY TO COMPLEX INTERPOLATION

A.A. Tadzhigitov[1], E.V. Klimov[1]
[1]NKSU named after M. Kozybaev, Petropavlovsk, KR

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ СЕМЕЙСТВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПЛЕКСНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Таджигитов А.А.[1], Климов Е.В.[1]
[1]СКГУ им. М. Козыбаева, г. Петропавловск, РК

КОМПЛЕКС ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ҚАТЫСТЫ ШЕКТІ ӨЛШЕМДІ ЖЕЛІЛІК КЕҢІСТІКТЕРДІҢ ЖӘНЕ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРДІҢ ҰЯЛЫ КЕЙБІР ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ ТУРАЛЫ

А.А. Таджигитов[1], Е.В. Климов[1]
[1]М. Қозыбаев атындағы СҚМУ, Петропавл қ., ҚР

Annotation

The article provides definitions of families of finite– dimensional network spaces and Lorentz spaces and discusses some interpolation properties of families of Lorentz spaces and finite– dimensional network spaces with respect to complex interpolation. The method of complex interpolation is determined. We consider auxiliary lemmas necessary for the proof of two main interpolation theorems, with the third lemma establishing the connection between the methods of complex and real interpolation. These theorems also hold for real interpolation. The first theorem is valid for finite– dimensional Lorentz spaces, and the second is for finite–dimensional network spaces. Equality obtained in the first theorem is understood in the sense of equivalence of norms with constants independent of the choice of the number N. Equality obtained in the second theorem is understood in a similar way. In addition, the concept of an interpolation functor is considered. Earlier, interpolation properties of families of finite– dimensional network spaces and Lorentz spaces with respect to real interpolation were determined.

Key words: Interpolation, finite–dimensional spaces, Lorentz spaces, complex interpolation.

Аннотация

В статье даются определения семейств конечномерных сетевых пространств и пространств Лоренца и рассматриваются некоторые интерполяционные свойства семейств пространств Лоренца и конечномерных сетевых пространств относительно комплексной интерполяции. Определен сам метод комплексной интерполяции. Рассмотрены вспомогательные леммы, необходимые для доказательства двух основных интерполяционных теорем, причем третья лемма устанавливает связь между методами комплексной и вещественной интерполяции. Данные теоремы имеют место и при вещественной интерполяции. Первая теорема справедлива для конечномерных пространств Лоренца, а вторая – для конечномерных сетевых пространств. Равенство, полученное в первой теореме понимается в смысле эквивалентности норм с константами, не зависящими от выбора числа N. Равенство, полученное во второй теореме понимается аналогичным образом. Кроме того, рассмотрено понятие интерполяционного функтора. Ранее были определены интерполяционные свойства семейств конечномерных сетевых пространств и пространств Лоренца относительно вещественной интерполяции.

Ключевые слова: Интерполяция, конечномерные пространства, пространства Лоренца, комплексная интерполяция.

Аңдатпа

Қарастырылған мақалада шекті өлшемді желілік кеңістіктер мен Лоренц кеңістіктерінің отбасыларының анықтамалары берілген және күрделі интерполяцияға қатысты Лоренц кеңістіктерінің және шекті өлшемді желілік кеңістіктердегі кейбір интерполяциялық қасиеттер талқыланады. Комплекс интерполяция әдісі анықталды. Біз екі негізгі интерполяциялық теореманы дәлелдеу үшін қажетті қосалқы леммаларды қарастырамыз, ал үшінші лемма күрделі және нақты интерполяция әдістерінің арасындағы байланысты орнатады. Бұл теоремалар нақты интерполяцияға да ие. Бірінші теорема өлшемді Лоренц кеңістіктері үшін жарамды, екіншісі – шекті өлшемді желілік кеңістіктер үшін жарамды. Бірінші теоремада алынған теңдік N санның таңдауынсыз тұрақтылықпен нормалардың эквиваленттігі мағынасында түсініледі. Екінші теоремада алынған теңдік ұқсас жолмен түсініледі. Бұдан басқа, интерполяция функторының тұжырымдамасы қарастырылады. Бұрын нақты интерполяцияға қатысты шекті өлшемді желілік кеңістіктер мен Лоренц кеңістіктерінің отбасыларының интерполяциялық қасиеттері анықталды. Сәйкес келетін интерполяциялық теоремалар алынды және дәлелденді.

Түйінді сөздер: Интерполяция, шекті өлшемді кеңістіктер, Лоренц кеңістіктер, комплекс интерполяциясы.

Introduction

Let $N \in \mathrm{N}$, designate it through M_n a set of all non– empty subsets from {1,2,...,N}, $M \subset M_n$ is a fixed set family which will be called as a net. For $a = \{a_i\}_{i=1}^N$ we shall define numbers:

$$\overline{a}_k(M) = \max_{e \in M, |e| \geq k} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{m \in e} a_m \right|, \quad k = \overline{1, N},$$

where $|e|$ – is a quantity of set e elements.

Let notice that $\{\overline{a}_k(M)\}_{k=1}^N$ is a monotone non– increasing finite dimensional sequence.

Let $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty.$

We shall define the family of finite spaces

$$n_{p,q}^N(M) = \{a = \{a_k\}_{k=1}^N\}, \quad N \in \mathrm{N}$$

With the norm at $1 \leq q < \infty$

$$\|a\|_{n_{p,q}^N(M)} = \left(\sum_{k=1}^N k^{q/p-1} \overline{a}_k^q(M) \right)^{\frac{1}{q}},$$

And at $q = \infty$

$$\|a\|_{n_{p,q}^N(M)} = \max_{1 \leq k \leq N} k^{\frac{1}{p}} \overline{a}_k(M).$$

The given spaces are finite dimensional analogues of net spaces, introduced in [1].

Let $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty.$ We shall define the family of finite Lorentz spaces

$$l_{p,q}^N = \{a = \{a_k\}_{k=1}^N\}, \quad N \in \mathrm{N}$$

with the norm at $1 \leq q < \infty$

$$\|a\|_{l_{p,q}^N} = \left(\sum_{k=1}^N k^{q/p-1} (a_k^*)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

at $q = \infty$

$$\|a\|_{l_{p,q}^N} = \max_{1 \leq k \leq N} k^{\frac{1}{p}} a_k^*,$$

where $\{a_k^*\}_{k=1}^N$ is a non– increasing permutation of sequence $\{|a_k|\}_{k=1}^N$.

Now we shall define the method of complex interpolation. For assigned pair $\overline{A} = (A_0, A_1)$ let examine the spaces $\mathrm{S}(\overline{A})$, made of all function f with the meanings in $\sum(\overline{A})$, limited and uninterrupted on the real line

$$S = \{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\},$$

analytical in the open real line

$$S_0 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$$

and those, that the reflection

$$t \to f(j + it),$$

where $j = 0{,}1$ is uninterrupted on the real line by the function with meanings in A_j, speeding to 0 at $|t| \to \infty$.

Otuiously, $\mathrm{S}(\overline{A})-$ is a vectorial space with the norm

$$\|f\|_{\xi(\overline{A})} = \max\left(\sup_t \|f(it)\|_{A_0},\ \sup_t \|f(1+it)\|_{A_1} \right).$$

The space S is Banach space. Lets assume that

$$\sum_n \| f_n \|_{\xi} < \infty.$$

By virtue of the limit $f_n(z)$ $\sum(\overline{A})$, we have

$$\| f_n(z) \|_{\sum(\overline{A})} \le \max\left(\sup \| f_n(it) \|_{\sum(\overline{A})}, \sup \| f_n(1+it) \|_{\sum(\overline{A})}\right)$$

As far as $A_j \subset \sum(\overline{A})$, we can conclude that

$$\| f_n(z) \|_{\sum(\overline{A})} \le \| f_n \|_{\xi} .$$

It is known that $\sum(\overline{A})-$is Banach space. From here if follows that the series $\sum_n f_n$ gathers in $\sum(\overline{A})$ uniformly in S to some function $f(z)$. It`s clear that this function is limited and continuous in S and analytical in S_0. Further,

$$\| f_n(j+it) \|_{A_j} \le \| f_n \|_{\xi}$$

and then, the series $\sum_n f_n(j+it)$ uniformly with t gathers in A_j to some element, that is to coinside with the sum of the series in $\sum(\overline{A})$. Consequently, $f(j+it) \in A_j$ and the series $\sum_n f_n(j+it)$ uniformly gathers to $f(j+it)$ in the norm A_j. From here, it follows that $f \in \mathrm{S}$ and that $\sum_n f_n$ gathers to f in the norm of S space.

Interpolation functor C_θ is defined by the following way: the space $\overline{A}_{[\theta]} = C_\theta(\overline{A})$, $0 \le \theta \le 1$, consists of all possible elements $a \in \sum(\overline{A})$, and those, that $a = f(\theta)$ for some function $f \in \mathrm{S}(\overline{A})$, with the norm

$$\| a \|_{[\theta]} = \inf \left\{ \| f \|_{\xi} : f(\theta) = a,\ f \in \xi \right\}.$$

Lemma 1. *The space $\overline{A}_{[\theta]}$ is Banach space and interfitical relatively the pair $\overline{A}$. The functor C_θ represents by itself the precise interpolation functor of θ type.*

Lemma 2. *At $0 < \theta < 1$ the embaddings occur*

$$\overline{A}_{\theta,1} \subset \overline{A}_{[\theta]} \subset A_{\theta,\infty}.$$

Lemma 3. (about connection between complex and real interpolation methods) *If* $0<\theta_0<\theta_1<1, \theta=(1-\eta)\theta_0+\eta\theta_1$ *and* $0<p\le\infty$*, then*

$$\left(\overline{A}_{[\theta_0]}, \overline{A}_{[\theta_1]}\right)_{\eta,p} = \overline{A}_{\theta,p}.$$

If $1\le p_i\le\infty, i=0,1$ *and* $\frac{1}{p}=\frac{1-\eta}{p_0}+\frac{\eta}{p_1}$*, then*

$$\left(\overline{A}_{\theta_0,p_0}, \overline{A}_{\theta_1,p_1}\right)_{[\eta]} = \overline{A}_{\theta,p}.$$

For finite Lorentz spaces the next theorem is true:

Theorem 1. *Let* $1\le p_0<p_1<\infty, 0<q_0,q_1<\infty,$

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\eta}{p_0}+\frac{\eta}{p_1}, \frac{1}{q}=\frac{1-\eta}{q_0}+\frac{\eta}{q_1}, 0<\theta<1.$$

Then the equality occur

$$\left(l^N_{p_0,q_0}, l^N_{p_1,q_1}\right)_{[\eta]} = l^N_{p,q}.$$

This equality is realized in the sence of equivalency of norms with constants independent from $N\in\mathrm{N}$.

For finite dimensional net spaces we have the next theorem.

Theorem 2. *Let*

$$1\le p_0<p_1<\infty, 0<q_0,q_1<\infty, \quad \frac{1}{p}=\frac{1-\eta}{p_0}+\frac{\eta}{p_1}, \frac{1}{q}=\frac{1-\eta}{q_0}+\frac{\eta}{q_1}, 0<\theta<1.$$

M – is a sef of all segments from the set $\{1, 2, ..., N\}$. *Then we have the equality*

$$\left(n^N_{p_0,q_0}(M), n^N_{p_1,q_1}(M)\right)_{[\eta]} = n^N_{p,q}(M).$$

This equality is realized in the sence of equivalency of norms with constants independent from $N\in\mathrm{N}$.

Literature:

1. Nursultanov E.D. Interpolation properties of some anisotropic spaces and Hardy–Littlwood type inequalities// {East J. Approx.} – 1998. – Vol. 4, N2. – P. 243–275.
2. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М., 1988. – 550 с.
3. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов.// Итоги науки и техники. – М., – 1986. – Т. 24. – С. 3–163.
4. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. – М., 1980. 264 с.