ЖАРАТЫЛЫСТАНУ ҒЫЛЫМДАР / ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ / NATURAL SCIENCES

DOI 10.54596/2958-0048-2026-1-11-24
УДК 528.236
МРНТИ 27.01

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Акбердин Р.А.[1*], Пионткевич А.С.[1], Симиков Г.И.[1]
[1]НАО «Северо-Казахстанский университет имени Манаша Козыбаева», Петропавловск, Казахстан*
[*]Автор для корреспонденции: grigorijsimikov@gmail.com

Аннотация
В статье на конкретных примерах рассматриваются вопросы методики применения метода координат к решению задачи на построение. Традиционно решение задач на построение включается в школьные учебники геометрии, что связано с тем, что решение задач на построение способствует развитию творческих способностей учеников и позволяет организовать проблемное повторение геометрии. Метод координат включен в школьную программу геометрии сравнительно недавно. Метод координат используется в основном для решения задач на доказательство геометрических предложений. Применение метода координат к решению задач на построение частично рассмотрены. Материалы этой статьи могут быть использованы как учителями математики школ и в первую очередь школ с углубленным изучением математики, а также преподавателями геометрических дисциплин педвузов.

Ключевые слова: метод координат, решение задач на построение, школьный курс геометрии, анализ, построение отрезков, заданных формулами.

ЖАЗЫҚТЫҚТА ҚҰРЫЛЫСТЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДЕ КООРДИНАТТАР ӘДІСІ

Акбердин Р.А.[1*], Пионткевич А.С.[1], Симиков Г.И.[1]
[1]«Манаш Қозыбаев атындағы Солтүстік Қазақстан университеті» КеАҚ, Петропавл, Қазақстан*
[*]Хат-хабарларға жауапты автор: grigorijsimikov@gmail.com

Аңдатпа
Мақалада нақты мысалдар негізінде құрылыстық есептерді шешуде координаттар әдісін қолдану әдістемесінің мәселелері қарастырылады. Дәстүрлі түрде құрылыстық есептерді шешу мектеп геометриясы оқулықтарына енгізіледі, себебі мұндай есептерді шешу оқушылардың шығармашылық қабілеттерін дамытуға және геометриядан проблемалық түрде қайталауға мүмкіндік береді. Координаттар әдісі мектеп геометрия курсына салыстырмалы түрде жақында енгізілген. Бұл әдіс негізінен геометриялық тұжырымдарды дәлелдеуге арналған есептерді шешуде қолданылады. Координаттар әдісін құрылыстық есептерді шешуге қолдану мәселесі еңбегінде жартылай қарастырылған. Осы мақаланың материалдары математика пәні мұғалімдеріне, бірінші кезекте математикаға бейінделген мектептердің педагогтеріне, сондай-ақ педагогикалық жоғары оқу орындарының геометрия пәні оқытушыларына пайдалы болуы мүмкін.

Кілт сөздер: координаттар әдісі, құрылыстық есептерді шешу, мектеп геометрия курсы, талдау, формулалар арқылы берілген кесінделерді құру.

THE COORDINATE METHOD IN THE PLANE FOR SOLVING CONSTRUCTION PROBLEMS

Akberdin R.A.[1*], Piontkevich A.S.[1], Simikov G.I.[1]
[1]Manash Kozybayev North Kazakhstan University NPLC, Petropavlovsk, Kazakhstan*
[*]Corresponding author: grigorijsimikov@gmail.com

Abstract
The article examines, through specific examples, methodological questions related to applying the coordinate method to solving geometric construction problems. Traditionally, construction problems are included in school geometry textbooks because solving such problems helps develop students' creative abilities and enables problem-based revision of geometry. The coordinate method was introduced into the school geometry curriculum relatively recently. It is used mainly for solving problems that involve proving geometric statements. The application of the coordinate method to construction problems has been partially discussed in. The materials presented in this article can be used by school mathematics teachers-especially those working in schools with advanced mathematics programs-as well as by instructors of geometry-related courses in teacher-training universities.

Keywords: coordinate method, solving construction problems, school geometry course, analysis, constructing line segments defined by formulas.

Введение

Задачи на построение циркулем и линейкой являются традиционным материалом школьного курса геометрии и курса элементарной геометрии, включаемого в учебные планы специальностей по подготовке учителей математики. Решение задач на построения развивают поисково-исследовательские навыки решения практических задач, а также могут послужить основой для организации учебных исследований и в том числе учебно-исследовательских проектов. При решении задач на построение используются геометрические предложения в самых различных сочетаниях, что, несомненно, способствует организации проблемного повторения. Одним из основных методов решения задач на построение является алгебраический [2, 165 – 182]. Сущность которого заключается в следующем: 1) решение задачи сводится к построению некоторого отрезка; 2) используя условия задачи составляется уравнение (системы уравнений), в которых этот отрезок (его длина) связывается с данными задачи; 3) решается это уравнение (система уравнений) этот отрезок (его длина) выражается через данные отрезки некоторой формулой; 4) используя полученную формулу строится искомый отрезок, затем искомая фигура.

Наибольшую трудность представляет реализация пункта (2) этой схемы т.к. при этом необходимо «творчески» использовать различные геометрические предложения, причем в различных сочетаниях. Метод координат сравнительно новый раздел курса школьной геометрии, а в учебных планах специальностей «математика» (педагогических) этот метод изучается в рамках традиционного курса «Аналитическая геометрия» [3,35–54,4,43–49]. Использование этого метода позволяет «алгоритмизировать» решение многих типов геометрических задач. Традиционно метод координат используется для решения задач на доказательство, нахождения множеств точек, удовлетворяющих определённым свойствам (геометрических мест точек). Применение метода координат к решению задач на построение фактически в известной нам литературе не исследуется – это свидетельствует о новизне материала.

Целью предлагаемой статьи является обоснование и описание возможностей использования метода координат на плоскости для проведения анализа решения задач на построение циркулем и линейкой, а также разработка алгоритмизированного подхода к их проведению.

Методы исследования

В исследовании использовались общенаучные методы: анализ и синтез, индукция и дедукция, сравнение и обобщение. В качестве специальных педагогических методов применялись моделирование учебных ситуаций, проектирование методики обучения и анализ результатов решения учебных задач.

Для математического обоснования выводов использовались методы логического доказательства и элементы математического моделирования. Решение задач на построение традиционно, состоит из четырех этапов: анализ, построение, доказательство, исследование [5, 29 – 39]. Применение метода координат связано в первую очередь с этапом – анализ. Предлагается следующая схема проведения анализа с использованием метода координат:

1) предполагая, что искомая фигура построена, вводится прямоугольная декартовая система координат (ПДСК) привязанная к «искомой» фигуре;

2) используя данные задачи находятся координаты «используемых» точек, уравнения фигур;

3) решение задачи сводится к построению некоторой точки. Координаты этой точки считаются неизвестными;

4) используя, найденные координаты точек и уравнения фигур (см. п. 2) составляются уравнения (системы уравнений) для нахождения координат искомой точки;

5) решив, полученные уравнения (системы уравнений) находим формулы выражающие координаты искомой точки через найденные координаты точек, коэффициентов уравнений фигур (см. п. 2);

6) используя полученные формулы, строим отрезки, соответствующие координатам искомой точки [5, 173 – 184];

7) по найденным координатам(отрезкам) строим искомую точку, а затем восстанавливаем искомую фигуру.

Для реализации этой схемы и в частности (п1-п4) необходимо использовать аппарат метода координат (аналитической геометрии). Необходимые материалы можно найти в [3; с 35 – 53, 58 – 70]

Реализации этой схемы мы продемонстрируем на примерах конкретных задач причем различного типа.

Результаты исследования

Начнем с традиционных задач на построение треугольников по его элементам.

Задача 1. Построить треугольник ABC по стороне a, медиане m_c и стороне c.

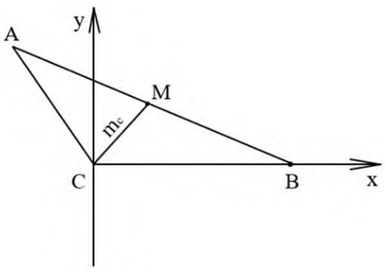

Рисунок – 1

Анализ:

1) Введем ПДСК (см. рис. 1).

2) Тогда $C(0;0), B(a;0)$ $(a > 0)$.

3) Решение задачи сводится к построению вершины A.

4) Пусть $A(x;y)$ $(y > 0)$. Выразим x и y через a, m_c, c.

5) M – середина AB , тогда $M\left(\frac{x+a}{2};\frac{y}{2}\right)$ и

$CM = \sqrt{\left(\frac{x+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}$. Так как $CM = m_c$, получаем

$y = 2\sqrt{m_c^2 - \left(\frac{x+a}{2}\right)^2}$ $(*)$.

Следовательно: $A\left(x; 2\sqrt{m_c^2 - \left(\frac{x+a}{2}\right)^2}\right)$ и

$c = AB = \sqrt{(x-a)^2 + 4\left(m_c^2 - \left(\frac{x+a}{2}\right)^2\right)} = 2\sqrt{m_c^2 - xa}$ и тогда $x = \frac{4m_c^2 - c^2}{4a}$ или

$x = \frac{\left(\sqrt{(2m_c)^2 - c^2}\right)^2}{4a}$ $(**)$. Используя построение отрезков, заданных формулами по заданным отрезкам a, m_c, c, можно построить отрезки x и y, а следовательно искомый треугольник ABC.

Используя введенную ПДСК и алгоритм нахождения координат точки A (см. п. 4), можно по аналогии рассмотреть анализ решения задач на построение треугольника ABC по следующим набором элементов: а) a, c, m_a; б) a, c, m_b; в) a, c, h_c; г) a, c, h_a; д) a, c, h_b. Проведение анализа этих задач предлагается читателям выполнить самостоятельно.

Задача 2. Построить треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и медиане m_a.

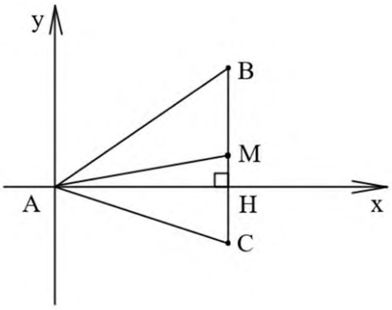

Рисунок – 2

Анализ:
1) Введем ПДСК (см. рис. 2).
2) Тогда $A(0; 0)$; $H(h_a; 0)$.
3) Решение задачи сводится к построению вершины B.
4) Пусть $B(h_a; y)$ и $C(h_a; y_1)$.
5) Выразим y_1 через y, m_a, h_a. Так как $M\left(h_a; \frac{y+y_1}{2}\right)$, то $AM = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{y+y_1}{2}\right)^2}$; $m_a = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{y+y_1}{2}\right)^2}$. После преобразований получим $y_1 = -y + 2\sqrt{m_a^2 - h_a^2}$. Следовательно: $C\left(h_a; -y + 2\sqrt{m_a^2 - h_a^2}\right)$ и $BC = a = 2\left(y - \sqrt{m_a^2 - h_a^2}\right)$. Следовательно, $y = \frac{a}{2} + \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$ $(*)$. Построив отрезок y по формуле $(*)$, можно построить вершину B, следовательно вершину C. Используя, полученные выражения для координат вершин треугольника, можно рассмотреть построение треугольника ABC по следующим данным: а) h_a, m_a, b; б) h_a, m_a, c, выразив через эти данные ординату вершины B. Задачи 1,2 – являются метрическими. Приведем пример решения позиционной задачи.

Задача 3. В данный треугольник вписать прямоугольник так, чтобы две его вершины лежали на основании, а две другие на его боковых сторонах. При условии, что: а) периметр был равен данному отрезку $2p$; б) диагональ была равна данному отрезку d; в) площадь была равна S^2 где S – данный отрезок; г) этот прямоугольник был квадратом; д) разность сторон была равна данному отрезку m.

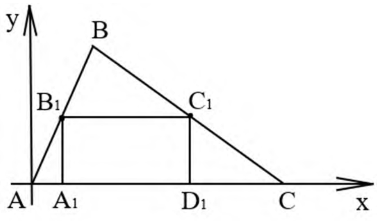

Рисунок – 3

Анализ (для задачи (а)):
1) Введем ПДСК (см. рис. 3).
2) Тогда $A(0; 0)$ $C(c; 0)$ $B(a; b)$.
3) Решение задачи сводится к построению одной из вершин искомого прямоугольника – например A_1. Пусть: $A_1(x; 0)$, $B_1(x; y)$, $C_1(x_1; y)$ и $D_1(x_1; 0)$.
4) Используя уравнение прямой заданной двумя точками, получим: $AB: by - ax = 0$ $BC: bx + y(c-a) - bc = 0$.

Учитывая, что B_1 принадлежит AB, а C_1 к BC, а также что: $A_1B_1 + B_1C_1 = p$, то получаем:

$\begin{cases} by - ax = 0 \\ bx_1 + y(c-a) - b \cdot c = 0 \\ y + (x_1 - x) = p \end{cases}$. После преобразований получим: $x = \frac{b^2(c-p)}{b^2+ac-a^2-ab}$ или $x = \frac{b \cdot b(c-p)}{\left(\sqrt{b(b-a)}\right)^2 + \left(\sqrt{a(c-a)}\right)^2}$. Используя построение отрезков, заданных формулами по заданным отрезкам a, b, c, p можно построить отрезок x, следовательно точку A_1, а затем и искомый прямоугольник.

Проведение анализа для решения задач (б)-(д) предлагается читателям в качестве самостоятельного задания. Следующий цикл задач на построение точек, удовлетворяющих определенным требованиям.

Задача 4. На стороне AC треугольника ABC построить точку X так, чтобы: а) X равноудалена от сторон AB и BC; б) сумма расстояний от нее до других сторон была бы равна m, где m – длина данного отрезка; в) $XM + XN = m$, где M принадлежит AB, N принадлежит BC и $XM \parallel BC, XN \parallel AB$.

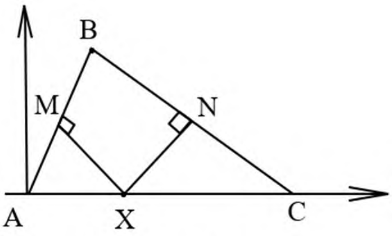

Рисунок – 4

Анализ для задачи (а):
Возможны два случая: а) $\angle A \leq 90°$ и $\angle C \leq 90°$. В этом случае точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и BC треугольника; б) $\angle A > 90°$ или $\angle C > 90°$. В этом случае точка M внешняя относительно стороны AB или N – внешняя относительно стороны BC. Рассмотрим случай (а).

1) Введем ПДСК (см. рис. 4).
2) Тогда $A(0;0)$ $C(c;0)$ $B(a;b)$.
3) Пусть $X(x;0)$.
4) Используя, что X равноудалена от прямых AB и BC и формулу для нахождения расстояния от точки до прямой и уравнения прямых:
$AB: by - ax = 0$; $AC: bx + y(c-a) - bc = 0$, получаем:
$\rho(X;AB) = \frac{|b \cdot 0 - a \cdot x|}{\sqrt{b^2+a^2}}$; $\rho(X;BC) = \frac{|b \cdot x + 0(c-a) - b\ |}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}$ или $\frac{|ax|}{\sqrt{b^2+a^2}} = \frac{|bx-b\ |}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}$. Учитывая, что $x > 0, a > 0,$ $b > 0, c > 0$ (см. случай а) получаем: $a \cdot x\sqrt{b^2+(c-a)^2} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot bx - bc\sqrt{b^2+a^2}$ или $x\left(b\sqrt{a^2+b^2} - a\sqrt{b^2+(c-a)^2}\right) = bc\sqrt{b^2+a^2} \Leftrightarrow x = \frac{bc\sqrt{b^2+c^2}}{b\sqrt{b^2+a^2} - a\sqrt{b^2+(c-a)^2}} (*)$. Используя построение отрезков заданных формулами, можно построить отрезок x, следовательно и искомую точку X. Причем точка X является основанием биссектрисы угла при вершине B. Оставшиеся этапы решения задач на построение: построение, доказательство, исследование, предлагаются выполнить самостоятельно. Решение задач (б), (в) также предлагается выполнить самостоятельно.

Задача 5. Пересечь треугольник ABC прямой MN параллельной стороне AC ($M -$ принадлежит стороне AB, а $N -$ стороне BC) так, чтобы: а) $AM = BN$; б) $AM = MN$; в) $AM + MN = m$, где $m -$ данный отрезок; г) $AM + BN = m$, где $m -$ данный отрезок.

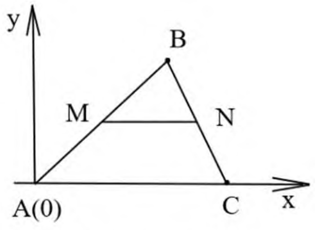

Рисунок – 5

Анализ (задача а):
1) Введем ПДСК (см. рис. 5).
2) Тогда $A(0;0), C(c;0)\ (c>0), B(a;b)\ (b>0)$.
3) Решение задачи сводится к построению точки M или N.
4) Пусть $M(x;y)$. Так как M принадлежит стороне AB получаем $y=\frac{b}{a}x\ (y<b)$. Пусть $N(x_1;y)$. Так как N принадлежит стороне BC, то $bx_1+(c-a)-bc=0$. Так как по условию $AM=BN$, то $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y)^2}$. Получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ bx_1+(c-a)-bc=0 \\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(a-x_1)^2+(b-y)^2} \end{cases}.$$
5) Из второго уравнения системы выразим x_1. Получим $x_1=\frac{bc+\ (a-c)}{b}$. Подставив в третье уравнение системы, используя первое уравнение, после преобразований получим $x=\frac{a\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{(a-c)^2+b^2}}}$.

Используя построение отрезков заданных формулами, строим отрезок x, а затем строим искомую точку M, зная её абсциссу x и то, что она принадлежит стороне AB.
Примечание: Проведение анализа для задач 5 (б)-(г) предлагается в качестве самостоятельного решения.

Задача 6. Через точку М принадлежащую биссектрисе прямого угла, провести прямую так, чтобы она отсекала на сторонах угла отрезки разность длин которых была бы равна s.

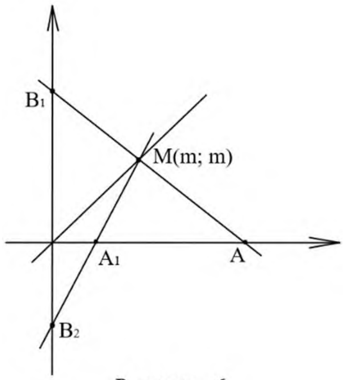

Рисунок – 6

Анализ:
1) Введем ПДСК (см.рис.6) $O(0;0)$.
$M(m;m)$ – так как M принадлежит биссектрисе прямого угла по условию. Пусть $B(0;y_0)$; $A(x_0;0)$.
2) Составим уравнение прямой АВ по двум точкам А и В $\frac{x-x_0}{0-x_0}=\frac{y-y_0}{y_0-0}$; $\frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y}{y_0}$.
3) По условию $|x_0-y_0|=s$, тогда возможна два случая $a)\ x_0-y_0=s;\ b)\ x_0-y_0=-s$
4) Рассмотрим случай (a). Случай (b) предлагаем рассмотреть в качестве самостоятельного задания.
5) Подставим в уравнение прямой АВ, $x_0=s+y_0$ (см. п.3): $\frac{x-s-y_0}{s+y_0}=\frac{y}{y_0}$; $(x-s-y_0)y_0=y(s+y_0)$.

6) Так как М принадлежит АВ, то подставим её координаты в уравнение прямой: $(m-s-y_0)y_0=m(s+y_0)$; $y_0m-sm-y_0^2-ms-my_0=0$; $y_0^2-2sm=0$; $y_0=\pm\sqrt{2sm}$, а $x_0=s+y_0$.

7) Тогда координаты точки $B\left(0;\sqrt{2sm}\right)$, а точки $A\left(s+\sqrt{2sm};0\right)$.

Используя построение отрезков заданных формулами, можно построить отрезки x_0, y_0, а затем искомые точки А и В.

Задача 7. Дан прямоугольный треугольник, на его гипотенузе построить такую точку, чтобы разность её расстояний до катетов была равна длине данного отрезка.

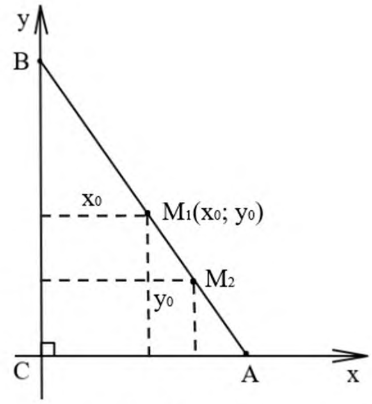

Рисунок – 7

Анализ:
1) Введем ПДСК (см. рис. 7):
$C(0;0)\ B(0;b)\ A(a;0) M(x_0;y_0)$.
2) По условию $|y_0 - x_0| = s$.
3) Составим уравнение прямой AB: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, а так как M принадлежит AB, то подставим её координаты в уравнение и получим: $\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$.
4) Возможны 2 случая:
а) $y_0 - x_0 = s$, тогда составим систему: $\begin{cases} \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \\ y_0 - x_0 = s \end{cases}$;
б) $y_0 - x_0 = -s$, тогда: $\begin{cases} \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \\ y_0 - x_0 = -s \end{cases}$.

5) Рассмотрим случай (а):

$$\begin{cases} \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1 \\ y_0 - x_0 = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_0}{a} + \frac{s + x_0}{b} = 1(*) \\ y_0 = s + x_0 \end{cases} \quad (*)\frac{x_0}{a} + \frac{s + x_0}{b} = 1$$

$x_0 b + sa + a x_0 - ab = 0$

$(a + b)x_0 = ab - sa, x_{0_1} = \frac{a(b-s)}{a+b}$, то $y_{0_1} = s + \frac{a(b-s)}{a+b} = \frac{b(a+s)}{a+b}$.

6) В случае (б) получим: $x_{0_2} = \frac{a(b+s)}{a+b}$; $y_{0_2} = \frac{b(a-s)}{a+b}$.

7) Следовательно, точки $M_1\left(\frac{a(b-s)}{a+b}; \frac{b(a+s)}{a+b}\right)$, а $M_2\left(\frac{a(b+s)}{a+b}; \frac{b(a-s)}{a+b}\right)$.

Используя построение отрезков заданных формулами можно построить отрезки x_0, y_0, а затем искомые точки M_1, M_2.

Задача 8. Построить точку, равноудалённую от сторон прямого угла и от данной точки M.

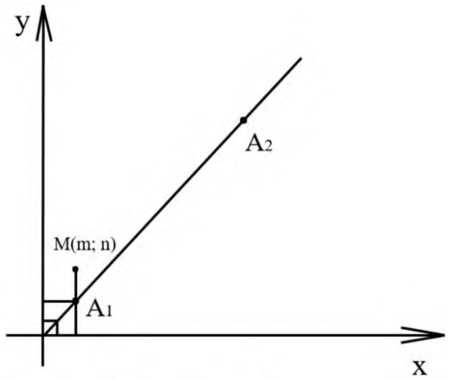

Рисунок – 8

Анализ:
1) Введем ПДСК (см. рис. 8), где $O(0;0); M(m;n)$.
2) Обозначим точку, которую надо найти A.
3) Так как она равноудалена от сторон прямого угла, следовательно лежит на биссектрисе прямого угла, следовательно $A(x_0; x_0)$.
4) Найдем $MA = x_0$, используя формулу:

$MA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\sqrt{(m - x_0)^2 + (n - x_0)^2} = x_0$

$m^2 - 2mx_0 + x_0^2 + n^2 - 2nx_0 + x_0^2 = x_0^2$

$x_0^2 - 2(2m + 2n)^2 - 4(m^2 + n^2) = 8mn$

$x_{0_1} = \dfrac{2m + 2n + \sqrt{8mn}}{2} = m + n + \sqrt{2mn}$

$x_{0_2} = m + n - \sqrt{2mn}$, следовательно, задача может иметь два решения.

5) Тогда получаем:

$A_1\left(m + n + \sqrt{2mn}; m + n + \sqrt{2mn}\right)$; $A_2\left(m + n - \sqrt{2mn}; m + n - \sqrt{2mn}\right)$.

Используя построение отрезков заданных формулами можно построить отрезки x_{0_1} и x_{0_2}, а затем искомые точки A_1, A_2.

Следующий цикл задач связан с построением окружности удовлетворяющих некоторым условиям.

Задача 9. Построить окружность, проходящую через 2 данные точки A, B и касающуюся данной прямой.

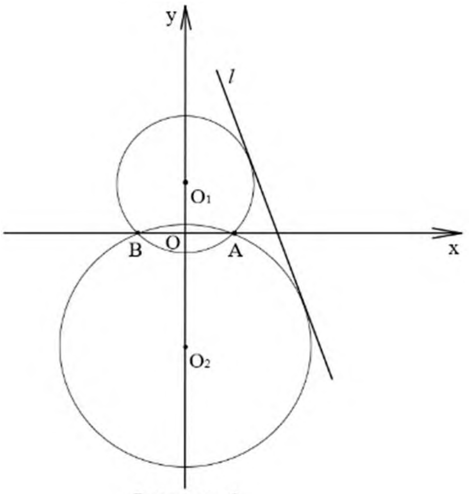

Рисунок – 9

Анализ:

1) Введем ПДСК (см. рис.9) так, чтобы две данные точки A и B принадлежат OX, тогда O_1 – центр окружности будет лежать на оси Oy.

2) Тогда: $A\left(\frac{a}{2}; 0\right)$; $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$; $O_1(0; y_0)$.

3) Уравнение прямой $l: y = kx + b; kx - y + b = 0$.

4) Так как окружность должна касаться прямой l, то справедливо:

$O_1A = \rho(O_1; l)$, тогда по формуле:

$$O_1A = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$O_1A = \sqrt{(0 - y_0)^2 + \left(\frac{a}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{y_0^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$\rho(O_1; l) = \frac{|kx-y+b|}{\sqrt{k^2+1^2}} = \frac{|b+k\cdot 0-y_0|}{\sqrt{k^2+1^2}} = \frac{|b-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\sqrt{y_0^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{|b-y_0|}{\sqrt{k^2+1}}; y_0^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{(b-y_0)^2}{k^2+1}; \left(y_0^2 + \frac{a^2}{4}\right) \cdot (k^2 + 1) = b^2 - 2by_0 + y_0^2;$

$D = 4b^2 + 4k^2b^2 - a^2k^4 - a^2k^2$; $y_{O_1} = \dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 + 4k^2b^2 - a^2k^4 - a^2k^2}}{2k^2}$;

$y_{O_2} = \frac{-2b-\sqrt{4b^2+4k^2b^2-a^2k^4-a^2k^2}}{2k^2}$. Задача может иметь два решения.

5) Угловой коэффициент k можно задать в виде отношения двух отрезков: $k = \frac{m}{n}$. Подставив в полученные формулы, получим:

$y_{O_1} = -\frac{2bn^2}{m^2} + \sqrt{\frac{b^2n^4}{m^4} + \frac{b^2n^2}{m^2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2n^2}{4m^2}}; y_{O_2} = -\frac{2bn^2}{m^2} - \sqrt{\frac{b^2n^4}{m^4} + \frac{b^2n^2}{m^2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2n^2}{4m^2}}.$

Используя построение отрезков, заданных формулами, можно построить отрезки y_{O_1}и y_{O_2}, а затем построить точки O_1 и O_2, центры искомых окружностей и далее искомые окружности с радиусами равными O_1A и O_2A.

Задача 10. Даны три точки A, B, C. Провести окружность через точки A и B так, чтобы точка C была серединой хорды окружности, причем хорда была бы данной длины.

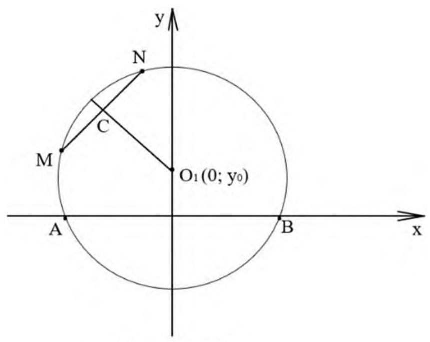

Рисунок – 10

Анализ:

1) Введем ПДСК (см.рис.10), где A, B принадлежат OX.

2) Тогда: $O_1(0; y_0); A(-a; 0); B(a; 0); C(c; d)$.

3) $O_1C = \sqrt{c^2 + (y_0 - d)^2}$.

4) Пусть $MN = m$, а $O_1B = \sqrt{a^2 + y_0^2}$, тогда:

$$O_1C = \sqrt{(a^2 + y_0^2) - \frac{m^2}{4}}.$$

5) Приравниваем O_1C: $\sqrt{c^2+(y_0-d)^2}=\sqrt{a^2+y_0^2-\frac{m^2}{4}}$

$c^2+y_0^2-2dy_0+d^2=a^2+y_0^2-\frac{m^2}{4}-2dy_0=a^2-\frac{m^2}{4}-c^2-d^2$; $y_0=\frac{-a^2+\frac{m^2}{4}+c^2+d^2}{2d}$.

6) Соответственно центр окружности имеет координаты:

$$O_1\left(0;\frac{-a^2+\frac{m^2}{4}+c^2+d^2}{2d}\right)$$

Используя построение отрезков, заданных формулами, можно построить отрезок y_0, а затем центр окружности, а по нему построить искомую окружность с радиусом O_1B.

Задача 11. В окружность радиуса r вписать равнобедренный треугольник, в котором, разность боковой стороны и высоты, проведенной к основанию, равна данному отрезку а.

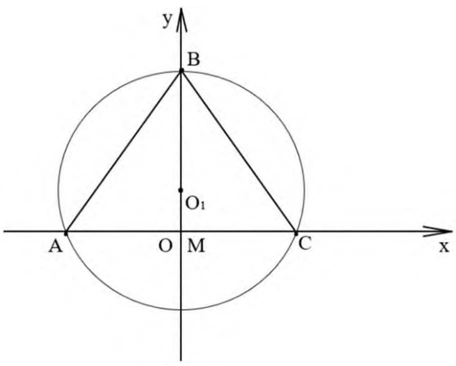

Рисунок – 11

Анализ:

1) Введем ПДСК (см.рис.11) $O_1(0;y_0)$; $M(0;0)$; $B(0;y_1)$; $C(x_0;0)$; $A(-x_0;0)$.

2) Найдем координаты вершин треугольника.

3) По условию $BC-BO=a$, по формуле для нахождения длины отрезка:

$BC=\sqrt{(x_0-0)^2+(0-y_1)^2}$,

$BO=y_1, \sqrt{x_0^2+y_1^2}-y_1=a$ или $\sqrt{x_0^2+y_1^2}=a+y_1$.

4) Уравнение окружности $x^2+(y-y_0)^2=r^2$.

5) Подставим координаты точки В:

$0^2+(y_1-y_0)^2=r^2$, так как $y_1>y_0$, то

$y_1-y_0=r$, подставим координаты точки С:

$x_0^2+y_0^2=r^2$.

6) Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1-y_0=r \\ x_0^2+y_0^2=r^2 \\ \sqrt{x_0^2+y_1^2}=a+y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=y_0+r \\ x_0^2=r^2-y_0^2 \\ x_0^2=a^2+2a(r+y_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=y_0+r \\ y_0^2+2ay_0+a^2-r^2+2ar=0 \\ x_0=r^2-y_0^2 \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение из второго уравнения системы получим

$y_0=\sqrt{r(r-2a)}\ -a$.

Используя построение отрезков, заданных формулами, можем построить y_0, а затем точку О, и далее искомый треугольник.

Задача 12. В окружность вписать прямоугольник данного периметра.

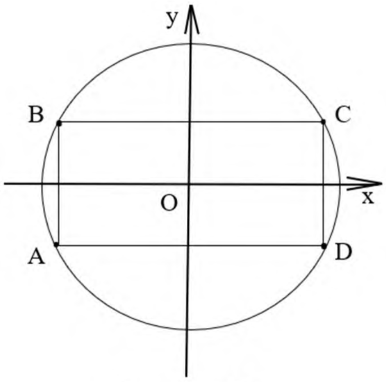

Рисунок – 12

Анализ:

1) Введем ПДСК (см. рис. 12), тогда координаты точек $O(0;0); C(x_0;y_0); D(x_0;-y_0); B(-x_0;y_0); A(-x_0;-y_0)$.

2) Используем формулы для нахождения длины отрезка:

$MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, где $M(x_1;y_1)$ $N(x_2;y_2)$

$BC = \sqrt{(x_0-(-x_0))^2+(y_0-y_0)^2} = 2x_0$;

$CD = \sqrt{(x_0-x_0)^2+(y_0-(-y_0))^2} = 2y_0$.

3) Пусть данный периметр $2p$, тогда $p = BC + CD$ следовательно $2p = 2x_0 + 2y_0$ (1).

4) Так как точки A, B, C, D принадлежат окружности, то $x_0^2 + y_0^2 = R^2$(2).

5) Решив систему уравнений из (1) и (2):

$$\begin{cases} p = 2x_0 + 2y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \dfrac{p}{2} - x_0 \\ x_0^2 + \left(\dfrac{p}{2} - x_0\right)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \dfrac{p}{2} - x_0 \\ x_0^2 + \dfrac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2 = R^2 \end{cases}$$

$$2x_0^2 - px_0 + \left(\frac{p^2}{4} - R^2\right) = 0$$

$$D = p^2 - 8\left(\frac{p^2}{4} - R^2\right) = p^2 - 2p^2 + 8R^2 = -p^2 + 8R^2$$

$$x_{0_1} = \frac{p+\sqrt{8R^2-p^2}}{4} = \frac{p+\sqrt{8R^2-p^2}}{4};$$

$$x_{0_2} = \frac{p-\sqrt{8R^2-p^2}}{4}.$$

Используя построение отрезков, заданных формулами, можем построить отрезки x_0, затем y_0, а следовательно, и точки A, B, C, D.

Задача 13. Даны две концентрические окружности и точка O_1 – равноудаленная от этих окружностей. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы вершины A и B принадлежали одной окружности, а вершины C и D другой, а точка O_1 являлась центром этого квадрата.

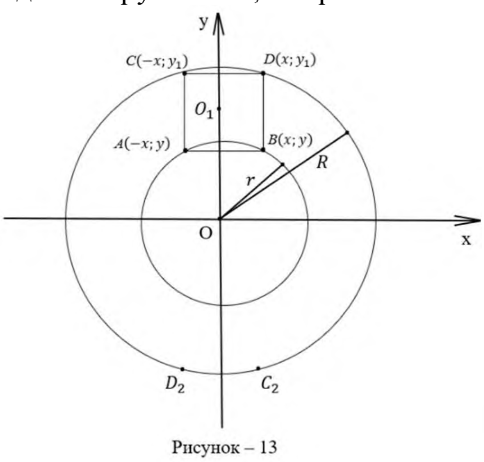

Рисунок – 13

Анализ:

1) Введём ПДСК с началом в точке O – центре окружностей, а точка O_1 принадлежит оси Oy.

2) Даны радиусы r и R.

3) Для построения нужно найти координаты вершин квадрата.

4) Пусть $B(x;y); A(-x;y)$, так как они симметричны относительно оси Oy $C(-x;y_1)$; $D(-x;y)$.

5) Уравнение окружностей: $x^2 + y^2 = r^2$;
$x^2 + y^2 = R^2$.

6) Подставим координаты точек:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y_1^2 = R^2 \\ 2x = y_1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 - y^2 = R^2 - r^2 \\ y_1 - y = 2x \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_1 - y)(y_1 + y) = R^2 - r^2 \\ y_1 - y = 2x \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y_1 + y) = R^2 - r^2 \\ y_1 - y = 2x \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y = \dfrac{R^2 - r^2}{2x} \\ y_1 - y = 2x \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \dfrac{R^2 - r^2 - 4x^2}{2x} \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy = R^2 - r^2 - 4x^2 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{R^2 - r^2 - 4x^2}{4x} \\ x^2 + \left(\dfrac{R^2 - r^2 - 4x^2}{4x}\right)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{R^2 - r^2 - 4x^2}{4x} \\ x^2 + \frac{R^4 + r^4 + 16x^4 - 2R^2r^2 - 8R^2x^2 + 8x^2r^2}{16\ {}^2} = r^2 \end{cases}$$

Выпишем и решим отдельно второе уравнение

$$16x^4 + R^4 + r^4 + 16x^2 - 2R^2r^2 - 8R^2x^2 + 8x^2r^2 = 16x^2r^2$$
$$16x^4 + 8x^2(2 - R^2 - r^2) + (R^4 + r^4 - 2R^2r^2) = 0$$
$$16x^4 + 8x^2(2 - R^2 - r^2) + (R^2 - r^2)^2 = 0$$
$$x^2 = t$$
$$16t^2 + 8t(2 - R^2 - r^2) + (R^2 - r^2)^2 = 0$$
$$D = 64(2 - R^2 - r^2)^2 - 64(R^2 - r^2)^2 =$$
$$= 64(4 + R^4 + r^4 - 4R^2 - 4r^2 + 2R^2r^2 - R^4 - r^4 + 2R^2r^2) =$$
$$= 64(4 - 4R^2 - 4r^2 + 4R^2r^2)$$
$$t = \frac{(R^2 + r^2 - 2) + \sqrt{1 - R^2 - r^2 + R^2r^2}}{4}$$

Используя что $x^2 = t$ и то, что $x > 0$

$$x = \sqrt{\frac{(R^2 + r^2 - 2) + \sqrt{1 - R^2 - r^2 + R^2r^2}}{4}}$$

Используя построение отрезков заданных формулами строим отрезок x, а, затем можно построить вершину B и искомый квадрат $ABCD$.

Задача 14. Найти множество точек плоскости для каждой из которых отношение расстояний от двух данных точек A и B есть величина постоянная равная $\lambda(\lambda \neq 1)$.

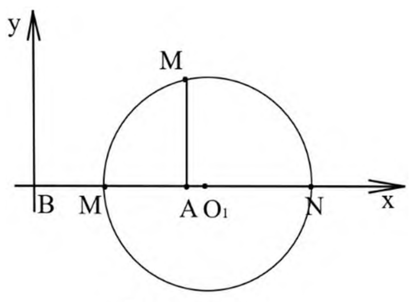

Рисунок – 14

Решение

1) Введем ПДСК (см. рис. 14).

2) Тогда $B(0; 0)$ $A(a; 0)$.

3) Пусть искомое множество точек (геометрическое место точек) – $\Phi = \left\{M : \frac{AM}{BM} = \lambda(\lambda \neq 1)\right\}$.

4) Пусть $M(x; y) \in \Phi \Leftrightarrow AM = \lambda BM \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$
$$(x-a)^2 + y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow$$
$$x^2(1 - \lambda^2) + y^2(1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ax}{1 - \lambda^2} + \frac{a^2}{1 - \lambda^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(x-\frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a\cdot\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$ – это уравнение определяет окружность с центром в точке $O_1\left(\frac{a}{1-\lambda^2};0\right)$ и радиуса $R=\frac{a\cdot\lambda}{|1-\lambda^2|}$ – эту окружность называют окружностью Апполония.

Примечание 1. При решении задач на построение λ задается в виде отношения двух отрезков: $\lambda=\frac{m}{n}$. Тогда: $O_1\left(\frac{a\cdot n^2}{n^2-m^2};0\right)$ $R=\frac{a\cdot m\cdot n^2}{(n^2-m^2)n}$ или $O_1\left(\frac{(a\cdot n)n}{\left(\sqrt{n^2-m^2}\right)^2};0\right)$ и $R_1=\frac{(a\cdot m)n}{\left(\sqrt{n^2-m^2}\right)^2}$. Используя построение отрезков заданных формулами можно построить точку O_1 – центр окружности Апполония и отрезок R – радиус этой окружности, следовательно и искомую фигуру Ф.

Примечание 2. Если $\lambda=1$ $(m=n)$, то уравнение искомой фигуры Ф принимает вид: $x=\frac{a}{2}$ – это уравнение прямой, серединного перпендикуляра к отрезку AB.

Задача 15. Найти множество точек плоскости для каждой из которых расстояние до данной прямой равно длине данного отрезка c.

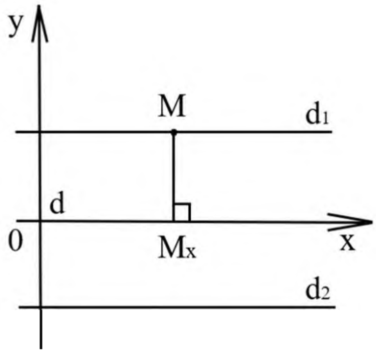

Рисунок – 15

Решение:

1) Введем ПДСК (см. рис. 16).

2) Пусть искомое множество точек $\Phi=\{M:\rho(M;OX)=c\}$.

3) Введем уравнение фигуры Ф. Уравнение $OX: y=0$

$M(x;y)\in\Phi\Leftrightarrow\rho(M;OX)=c\Leftrightarrow\frac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}}=c\Leftrightarrow|y|=c\Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix}y=c\\y=-c\end{matrix}\right.$ – это уравнение пары параллельных прямых d_1 и d_2 параллельных данной прямой.

Приведем пример реализации задачи на построение, решаемое методом пересечений с применением метода координат.

Задача 16. Построить параллелограмм по стороне a, отношению диагоналей $m:n$, и высоте h.

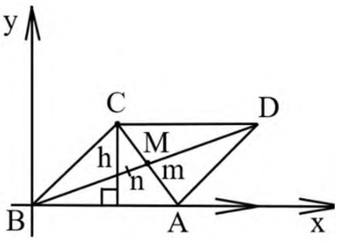

Рисунок – 16

Анализ:

1) Решение задачи сводится к построению точки M пересечения диагоналей параллелограмма.

2) Точка M – обладает двумя свойствами:

а) $AM:BM=\lambda=\frac{m}{n}$; б)$\rho(M,AB)=\frac{h}{2}$.

3) Φ_1 – окружность Апполония (см. задачу 14) и Φ_2 – пара параллельных прямых d_1 и d_2 (см. задачу 16).

4) Возможны два варианта дальнейшего решения:

а) Используя уравнения фигур Φ_1 и Φ_2 строятся эти фигуры и строится искомая точка М принадлежащая их пересечению, а затем достроить до параллелограмма;

б) Решая систему из уравнений фигур Φ_1 и Φ_2 находят координаты точки М, а затем построив точку М построим параллелограмм.

$$\begin{cases}\left(x-\frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\\ y=\pm c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{a}{1-\lambda^2}\right)^2+c^2=\left(\frac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\\ y=\pm c\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{a}{1-\lambda^2}\right)^2 = \left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 - c^2 \\ y = \pm c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{a}{1-\lambda^2} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 - c^2} \\ y = \pm c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 - c^2} + \dfrac{a}{1-\lambda^2} \\ y = \pm c \end{cases}$$

Подставив $\lambda = \frac{m}{n}$, после преобразований получим:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\sqrt{\left(\frac{am}{\sqrt{n^2-m^2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}\right)^2 - c^2} + \frac{(an)\cdot n}{\left(\sqrt{n^2-m^2}\right)^2}} (*) \\ y = \pm c \end{cases}$$

Система имеет четыре решения, так как получим четыре точки пересечения диагоналей, а, следовательно, четыре искомых параллелограмма, но можно показать, что эти параллелограмма попарно равны, а, следовательно, задача может иметь не более одного решения. Поэтому достаточно рассмотреть построение одной из четырех точек полученных в результате решения системы $(*)$. Например, $M\left(\sqrt{\sqrt{\left(\frac{am}{\sqrt{n^2-m^2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}\right)^2 - c^2} + \frac{(an)\cdot n}{\left(\sqrt{n^2-m^2}\right)^2}}; c\right)$. Для построения точки M достаточно построить отрезки, соответствующие её координатам используя построение отрезков, заданных формулами.

Обсуждение

Приведенные схемы применения метода координат к решению задач на построение и примеры их использования свидетельствуют о том, что применение метода координат существенно облегчает проведение этапа анализа решения задач на построение, а также способствуют установлению взаимосвязей при изучении различных разделов школьного, а также вузовского курса геометрии. Приведенные схемы и примеры решения задач могут быть использованы как в школьной практике, так и при изучении соответствующих разделов геометрии при подготовке будущих учителей математики.

Заключение

Исходя из цели данного исследования необходимо было обосновать и продемонстрировать применение метода координат к решению задач на построение. В разделе результаты исследования приведен анализ для решения 16 задач на построение при этом различного типа. Часть из них имеет оригинальное содержание и не фигурировало в известной литературе. При проведении исследования использовалась схема (смотреть раздел «методы исследования»), которая позволила алгоритмизировать проведение анализа. В дальнейшем можно исследовать вопросы применения метода координат не только при проведении анализа в задачах на построение, но и проведения этапа – исследование. Можно также исследовать вопросы использования метода координат в задачах на построение, решаемых методом геометрических преобразований.

Литература:

1. Никитина Г. Н. Решение задач на построение методом координат // Математика в школе. – 1987. – № 3. – С. 51–54.
2. Дадаян А. А. Геометрические построения на плоскости и в пространстве. – М.: Форум, 2024. – 464 с.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. – М.: Просвещение, 1986. – 336 с.
4. Атанасян Л. С., Глизбург В. К. Сборник задач по геометрии. – М.: Эксмо, 2007. – 334 с.
5. Аргунов Б. К., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. – М.: Учпедгиз, 1957. – 266 с.

References:

1. Nikitina G. N. Reshenie zadach na postroenie metodom koordinat // Matematika v shkole. – 1987. –№3. – P. 51–54.
2. Dadayan A. A. Geometric Constructions in the Plane and in Space. – M.: Forum, 2024. – 464 p.
3. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. Geometry. – M.: Prosveshchenie, 1986. – 336 p.
4. Atanasyan L. S., Glizburg V. K. Sbornik zadach po geometrii. – M.: Eksmo, 2007. – 334 p.
5. Argunov B. K., Balk M. B. Geometricheskie postroeniya na ploskosti. – M.: Uchpedgiz, 1957. –266 p.

Information about the authors

R.A. Akberdin – corresponding author, Honored Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Kozybayev University, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: rakberdin@ku.edu.kz;
A.S. Piontkevich – 3rd year student majoring in Mathematics – Physics, Kozybayev University, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: piontkevica@gmail.com;
G.I. Simikov – 3rd year student majoring in Mathematics-Physics, Kozybayev University, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: grigorijsimikov@gmail.com.