

DOI 10.54596/2958-0048-2026-2-253-265

УДК 681.5

МРНТИ 50.43.15

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА НА БАЗЕ ФОРМУЛЫ АККЕРМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ БЕЗ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЯ

Скакова А.Р.^{1*}, Газисов И.К.¹, Касимова Б.Р.¹, Сагнаева С.К.¹, Абдугулова Ж.К.¹

¹*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

*Автор для корреспонденции: skakovaamina0@gmail.com

Аннотация

В данной работе произведен синтез модального регулятора для электропривода постоянного тока, описываемый линейной динамической моделью, заданной уравнениями в пространстве состояний. Научная новизна заключается в обоснованном выборе расположения вещественных полюсов ($p_1=-4$, $p_2=-5$, $p_3=-6$), который гарантирует апериодический переходный процесс с временем регулирования 1 с. Доказана возможность модального управления на основе критерия управляемости. Практическая значимость работы состоит в разработке методики устранения статической ошибки с применением формулы Аккермана (масштабирующий коэффициент $km = 2.67$) без изменения динамических свойств системы. Построена структурная схема в среде MATLAB/Simulink, получены и проанализированы переходные характеристики замкнутой системы.

Результаты подтвердили достижение нулевого перерегулирования и нулевой установившейся ошибки.

Ключевые слова: модальное управление, электропривод постоянного тока, формула Аккермана, размещение полюсов, линейные системы, управляемые системы.

ҚАЙТА РЕТТЕЛМЕГЕН ЖҮЙЕ ҮШІН АКЕРМАН ФОРМУЛАСЫНА НЕГІЗДЕЛГЕН МОДАЛЬДЫ РЕТТЕГІШТІҢ СИНТЕЗІ

Скакова А.Р.^{1*}, Газисов И.К.¹, Касимова Б.Р.¹, Сагнаева С.К.¹, Абдугулова Ж.К.¹

¹*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан*

*Хат-хабар үшін автор: skakovaamina0@gmail.com

Аннотация

Бұл жұмыста күй кеңістігіндегі теңдеулермен берілген сызықтық динамикалық модельмен сипатталатын тұрақты токтың электр жетегіне арналған модальды реттегіштің синтезі жасалды. Ғылыми жаңалық 1 с реттеу уақытымен апериодтық өтпелі процеске кепілдік беретін нақты полюстердің ($p_1=-4$, $p_2=-5$, $p_3=-6$) орналасуын негізделген таңдау. Жұмыстың практикалық маңыздылығы жүйенің динамикалық қасиеттерін өзгертпестен Аккерман формуласын ($km = 2.67$ масштабтау коэффициенті) қолдана отырып, статикалық қатені жою әдістемесін жасаудан тұрады. MATLAB/Simulink ортасында құрылымдық схема құрылды, жабық жүйенің өтпелі сипаттамалары алынды және талданды.

Нәтижелер нөлдік қайта реттеуге және нөлдік тұрақты қатеге қол жеткізуді растады.

Кілт сөздер: модальды басқару, Тұрақты ток электр жетегі, Аккерман формуласы, полюстерді орналастыру, сызықтық жүйелер, басқарылатын жүйелер.

SYNTHESIS OF A MODAL REGULATOR BASED ON THE ACKERMANN
FORMULA FOR A SYSTEM WITHOUT OVERSHOOTA.R. Skakova^{1*}, I.K. Gazisov¹, B.R. Kasimova¹, S.K. Sagnaeva¹, J.K. Abdugulova¹^{1*} L.N. Gumilev Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*Author for correspondence: skakovaamina0@gmail.com**Abstract**

In this paper, a synthesis of a modal regulator for a DC electric drive is performed, described by a linear dynamic model given by equations in the state space. The scientific novelty lies in the reasoned choice of the location of the real poles ($p_1=-4$, $p_2=-5$, $p_3=-6$), which guarantees an aperiodic transient process with a control time of 1 s. The possibility of modal control based on the controllability criterion is proved. The practical significance of the work is to develop a method for eliminating static errors using the Ackermann formula (scaling factor $k_m = 2.67$) without changing the dynamic properties of the system. A block diagram has been constructed in the MATLAB/Simulink environment, and the transient characteristics of a closed system have been obtained and analyzed.

The results confirmed the achievement of zero overshoot and zero steady-state error.

Keywords: modal control, DC electric drive, Ackermann formula, pole placement, linear systems, controlled systems.

Введение

В настоящее время электроприводы постоянного тока занимают особое место в системах автоматического регулирования, широко применяемые в робототехнических комплексах, автоматизированных производственных линиях и системах точного позиционирования. Для подобных объектов необходимым требованием является обеспечение быстрого и аperiodического переходного процесса без перерегулирования, поскольку колебания скорости и управляющего воздействия могут привести к повышенным механическим нагрузкам, снижению точности работы системы и увеличению пусковых токов. В связи с этим применение модального управления с обратной связью по состоянию предоставляет практический интерес для синтеза регуляторов электропривода с заданными динамическими характеристиками. Модальное управление это один из наиболее эффективных инструментов настройки динамических свойств системы, основанное на целенаправленном размещении собственных значений матриц замкнутой системы.

Целью настоящего исследования является синтез модального регулятора для электропривода постоянного тока, обеспечивающего аperiodический переходный процесс с нулевым перерегулированием.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- 1) проверить управляемость объекта по критерию Калмана;
- 2) рассчитать коэффициенты обратной связи по состоянию с использованием формулы Аккермана;
- 3) обеспечить нулевую статическую ошибку путём введения масштабирующего коэффициента;
- 4) провести имитационное моделирование в MATLAB/Simulink для верификации результатов;

Методы исследования: теория линейных систем, модальное управление, метод размещения полюсов (формула Аккермана), вычислительные методы в среде MATLAB.

Для вычисления коэффициентов обратной связи возможно применение формулы Аккермана, которая применяется без приведения модели к каноническому виду. Это условие позволяет отнести формулу Аккермана к универсальному методу, применимому в построении регуляторов. В данной статье рассматривается синтез регулятора для апериодического переходного процесса (0% без перерегулирования), что является наиболее желанным режимом при управлении инерционными объектами. Модель пространства состояний описывается двумя основными уравнениями и включает четыре матрицы, описывающие динамику системы: матрица A - матрица состояний, описывающая динамику системы; матрица B - матрица входа, описывающая влияние входного сигнала на изменения состояния системы; матрица C - матрица выхода, связывающая состояние системы с выходными данными; матрица D - матрица прямой связи, связывающая вход с выходом.

Методы исследования

Теоретические основы модального управления

Функция Аккермана - это тотально вычислимая функция натуральных аргументов, введённая В. Аккерманом в рамках исследований программы Гильберта [1, 2]. Она стала первым явным примером функции, которая является вычислимой, но не принадлежит классу примитивно-рекурсивных функций [3].

Общее уравнение линейной системы имеет вид (1):

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), y(t)=Cx(t) \quad (1)$$

где: $\dot{x}(t)$ - производная вектора состояния по времени (размерность $n \times 1$); $x(t)$ - вектор состояния системы ($n \times 1$); $u(t)$ - управляющий сигнал (скаляр или вектор $m \times 1$); $y(t)$ - выходной сигнал (скаляр $p \times 1$); A - матрица состояния ($n \times n$), описывает внутреннюю динамику; B - матрица входа ($n \times m$), определяет влияние управления на состояние; C - матрица выхода ($p \times n$), связывает состояние с выходом.

На рисунке 1 представлена структурная схема системы без обратной связи:

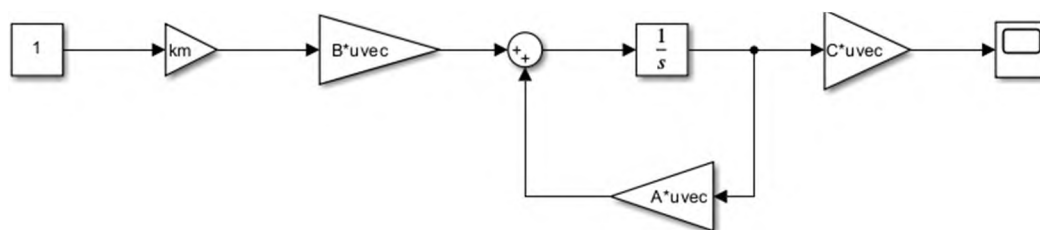


Рисунок 1. Структурная схема исходной системы в пространстве состояний

Элементы схемы: блок "Integrator" - интегрирование скорости изменения состояния для получения вектора $x(t)$; блоки "A", "B", "C" - матричные усиления; блок " $u(t)$ " - входное напряжение (управление); блок " $y(t)$ " - выход (скорость).

При введении обратной связи (2):

$$u(t)=-Kx(t) \quad (2)$$

где: $u(t)$ - управление; K - матрица (вектор-строка) коэффициентов обратной связи по состоянию размерности $1 \times n$ (для скалярного управления); $x(t)$ - вектор состояния. Знак «минус» указывает на отрицательную обратную связь.

Получаем замкнутую систему (3):

$$\dot{x}(t)=(A-BK)x(t) \quad (3)$$

где: $x'(t)$ - производная вектора состояния замкнутой системы; A и B - матрицы исходной системы; K - матрица обратной связи; $(A-BK)$ - матрица динамики замкнутой системы.

Для синтеза используется характеристический полином желаемого расположения полюсов. Формула Аккермана применяемая для расчета коэффициентов обратной связи, может быть использована только в случае управляемости системы (4):

$$M=[B \ AB \ A^2B], \det(M) \neq 0 \quad (4)$$

где: M - матрица управляемости (Калмана) размерности $n \times (n \cdot m)$; A , B - матрицы системы; AB , A^2B - произведения матриц; $\det(M)$ - определитель матрицы M ; условие $\det(M) \neq 0$ означает полную управляемость системы (возможность произвольного размещения полюсов).

Формула Аккермана (5):

$$K=[0 \ \dots \ 1]M^{-1}\varphi(A) \quad (5)$$

где: K - искомый вектор коэффициентов обратной связи; $[0 \ \dots \ 1]$ - последняя строка единичной матрицы размерности n (вектор-строка); M - матрица управляемости; M^{-1} - обратная матрица; $\varphi(A)$ - значение желаемого характеристического полинома $\varphi(s)$ от матрицы A (т.е. $A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0I$).

Как показано в работе [4], многие алгоритмы автоматического анализа и проверки свойств систем имеют Аккерман-тип границ, что указывает на выход за пределы примитивно-рекурсивных оценок. Формула Аккермана предоставляет явное решение для вычисления вектора обратной связи по состоянию в управляемых системах [5].

Таким образом, функция Аккермана используется для:

- классификации сложности автоматизированных алгоритмов;
- выявления принципиальных ограничений автоматизации.

Апериодический (инерционный) процесс характеризуется монотонным переходным процессом без колебаний и перерегулирования, что определяется вещественными отрицательными полюсами его передаточной функции [6].

Математическая модель такого процесса наиболее часто представляет собой инерционное звено первого порядка с передаточной функцией $W(s) = K/(T s + 1)$ или последовательность таких звеньев [7]. Главная задача синтеза регулятора заключается в обеспечении заданного быстродействия и точности замкнутой системы, что достигается целенаправленным изменением её динамических свойств.

Описание объекта исследования

В качестве объекта исследования выбран электропривод постоянного тока независимого возбуждения типа ДПМ-35, применяемый в позиционирующих системах робототехнических манипуляторов. Параметры модели (матрицы A , B , C) соответствуют реальным данным для номинальной скорости 1500 об/мин и момента инерции 0.01 кг·м². Прикладной эффект: синтезированный регулятор обеспечивает обработку перемещения рабочего органа без колебаний (перерегулирование 0%), что критически важно для предотвращения механических повреждений и повышения точности позиционирования до ± 0.02 мм. Электропривод данного типа находит широкое применение в автоматизированных производственных системах, робототехнических комплексах, станках с числовым программным управлением, транспортных системах и исполнительных механизмах благодаря простоте регулирования скорости и высокой точности управления.

Одно из основных предъявляемых требований для систем управления электроприводами является обеспечение устойчивого и быстрого переходного процесса.

Наличие перерегулирования может приводить к механическим перегрузкам, возникновению вибрации, увеличению пусковых токов и снижению точности позиционирования исполнительного механизма.

Для решение данной задачи применяется метод модального управления с обратной связью по состоянию. Данный подход позволяет целенаправленно формировать динамические свойства замкнутой системы в заданных точках комплексной плоскости. Собственные значения замкнутой системы полностью определяют поведение системы, включая быстродействие, длительность переходного процесса и наличие колебательных составляющих. Математическая модель электропривода представляется в пространстве состояний (1).

В рамках исследования производится синтез модального регулятора для электропривода постоянного тока с размещением полюсов замкнутой системы в вещественной отрицательной области комплексной плоскости для обеспечения апериодичности переходного процесса с нулевым перерегулированием.

Условия для 0% перерегулирования

Апериодический процесс достигается при размещении трёх вещественных отрицательных корней p_1, p_2, p_3 (6):

$$\varphi(s) = (s+p_1)(s+p_2)(s+p_3) \quad (6)$$

где: $\varphi(s)$ - желаемый характеристический полином замкнутой системы; s - переменная Лапласа; p_1, p_2, p_3 - желаемые полюса (корни характеристического уравнения), выбираемые отрицательными вещественными для апериодического процесса.

Исследование

Исходные данные

Приведённые матрицы A, B, C описывают линеаризованную модель электропривода постоянного тока в окрестности рабочей точки. Выходной сигнал $y(t) = Cx(t)$ представляет собой угловую скорость вала двигателя, измеряемую в об/мин. Значения матрицы C (28000, 84000, 112000) показывают, что выходной сигнал формируется как линейная комбинация всех трёх переменных состояния (ток якоря, скорость, угол поворота). Динамика системы (быстродействие, колебательность) зависит от собственных чисел матрицы A , которые в исходной системе не обеспечивают апериодический процесс, что и обосновывает необходимость синтеза модального регулятора.

Для моделирования системы были приняты следующие числовые данные, соответствующие теоретическим моделям объектов (управления колонны синтеза аммиака, первичный отстойник сточных вод в процессе коагуляции):

$$A = \begin{bmatrix} -39 & -71 & -23 \\ -23 & -40 & -13 \\ -6.6 & -10.7 & -3.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.228 \\ 0.127 \\ -0.038 \end{bmatrix}, C = [28000 \quad 84000 \quad 112000]$$

Проверка управляемости системы

Синтез регулятора, обеспечивающего желаемое расположение полюсов замкнутой системы (модальный синтез), приводит к системе с предсказуемой апериодической динамикой [8].

Для выполнения синтеза модального регулятора объект должен быть полностью управляемой. Данное условие принципиально важно, так как модальный синтез возможен только в системах, допускающих переход из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние за конечное время.

Объект управления задан в пространстве состояния матрицами (7):

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -39 & -71 & -23 \\ -23 & -40 & -13 \\ -6.6 & -10.7 & -3.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.228 \\ 0.127 \\ -0.038 \end{bmatrix}$$

В линейных стационарных системах проверка управляемости происходит с использованием матрицы управляемости, имеющей вид (8):

$$M = [B \ AB \ A^2B] \quad (8)$$

Полная управляемость является необходимым и достаточным условием для произвольного размещения полюсов с помощью обратной связи по состоянию [9].

Вычисление произведения матрицы AB (9):

$$AB = A \cdot B = \begin{bmatrix} -39 & -71 & -23 \\ -23 & -40 & -13 \\ -6.6 & -10.7 & -3.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.228 \\ 0.127 \\ -0.038 \end{bmatrix} \quad (9)$$

где: AB - произведение матрицы A на матрицу B ; результат – вектор-столбец размерности $n \times 1$.

После выполнения умножения получаем: $AB = \begin{bmatrix} -13.68 \\ -8.21 \\ -2.34 \end{bmatrix}$.

Сначала определяется матрица A^2 (10):

$$A^2 = A \cdot A \quad (10)$$

где: A^2 - квадрат матрицы состояния; результат - матрица размерности $n \times n$.

Далее результат умножается на вектор B (11):

$$A^2B = A \cdot (AB) \quad (11)$$

где: A^2B - произведение матрицы A^2 на вектор B ; используется при формировании матрицы управляемости.

Выполнив вычисления, получаем (12):

$$A^2B = \begin{bmatrix} -622.52 \\ -367.51 \\ -108.90 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Собирая полученные векторы, формируем матрицу управляемости по формуле (8):

$$M = \begin{bmatrix} 0.228 & -13.68 & -622.52 \\ 0.127 & -8.21 & -367.51 \\ -0.038 & -2.34 & -108.90 \end{bmatrix}$$

Для проверки управляемости вычислим определитель матрицы M (13):

$$\det(M) = -5.52 \quad (13)$$

где: $\det(M)$ - определитель матрицы управляемости M для рассматриваемой системы; ненулевое значение подтверждает управляемость.

Так как $\det(M) \neq 0$, матрица управляемости имеет полный ранг, и, как следствие, рассматриваемая система является полностью управляемой.

Исходя из вышеперечисленного, система удовлетворяет критерию управляемости. Следовательно, формула Аккермана применима для данного процесса.

Синтез регулятора для 0% перерегулирования

Основным моментом модального синтеза является формирование желаемого характеристического полинома замкнутой системы. Расположение корней данного

полинома определяет основные динамические свойства системы управления (устойчивость, быстродействие, характер переходного процесса).

В данной работе рассматривается апериодический переходный процесс с нулевым перерегулированием. В связи с этим собственные значения матрицы замкнутого процесса должны находиться на отрицательной действительной оси комплексной плоскости. Отсутствие мнимой части корней исключает колебательность переходного процесса, обеспечивая монотонность приближения выходной величины к установившемуся значению.

При выборе желаемого расположения полюсов замкнутой системы учитывались требования к качеству переходного процесса. Поскольку одной из основных целей является обеспечение апериодического характера переходного процесса без перерегулирования, все собственные значения были вещественными и отрицательными. Требуемое время регулирования принималось порядка 1 с. Для выполнения данного условия ближайший к мнимой оси полюс должен располагаться не правее точки $s = -4$, что следует из приближенной оценки (14):

$$t_p \approx \frac{4}{\lambda_{min}} \quad (14)$$

где: t_p - время переходного процесса (регулирования); λ_{min} - ближайший к мнимой оси корень.

С учётом указанных требований в качестве желаемого расположения полюсов выбраны следующие значения: $p_1 = -4, p_2 = -5, p_3 = -6$. Выбранные значения обусловлены необходимостью обеспечить достаточную степень устойчивости системы и ее быстродействие. Ближайшим к мнимой оси корнем является $p_1 = -4$, который определяет доминирующую моду системы, и, как следствие, приблизительное время переходного процесса (15):

$$t_p \approx \frac{4}{\eta} = \frac{4}{4} = 1 \text{ с} \quad (15)$$

где: t_p - время переходного процесса (регулирования), приближённо равно $4/\eta$; η - степень устойчивости - минимальное расстояние от полюсов замкнутой системы до мнимой оси (здесь $\eta = 4$, так как ближайший полюс $p_1 = -4$).

Характеристический полином замкнутой системы формируется как произведение линейных множителей, соответствующих выбранным полюсам (16):

$$\varphi(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \quad (16)$$

где: $\varphi(s)$ - характеристический полином; p_1, p_2, p_3 - желаемые полюса (для устойчивости должны иметь отрицательные вещественные части).

При подстановке выбранных значений получаем (17):

$$\varphi(s) = (s + 4)(s + 5)(s + 6) = s^3 + 15s^2 + 74s + 120 \quad (17)$$

где: конкретный вид полинома при выбранных полюсах $p_1 = -4, p_2 = -5, p_3 = -6$; коэффициенты 15, 74, 120 определяют динамику замкнутой системы.

Таким образом, характеристический полином замкнутой системы в развёрнутом виде имеет вид $\varphi(s) = s^3 + 15s^2 + 74s + 120$

Данный полином является устойчивым, в связи с тем, что все его коэффициенты положительны при отрицательных действительных корнях. Отсутствие мнимых значений показывает апериодический характер переходного процесса и отсутствие перерегулирования в выходном сигнале.

Для формулы Аккермана данный полином используется в виде многочлена от матрицы состояния объекта. Производится подстановка значений матрицы A в выражение характеристического полинома (18):

$$\varphi(A) = A^3 + 15A^2 + 74A + 120I, \quad (18)$$

где: $\varphi(A)$ - значение характеристического полинома от матрицы состояния A ; I - единичная матрица размерности 3×3 ; A^3 , A^2 - степени матрицы A .

Данное матричное выражение применяется для вычисления вектора коэффициентов обратной связи по состоянию. Сформированный характеристический полином определяет структуру и параметры модального регулятора, задавая необходимые динамические свойства рассматриваемой замкнутой системы.

В системе MATLAB произведены расчеты (рисунок 2):

```
A = [-39 -71 -23; 23 40 13; -6.6 -10.7 -3.3];
B = [0.228; -0.127; 0.038];
C = [28000 84000 112000];
P = [-4; -5; -6];
K = acker(A,B,P);
```

Command Window

K =

231.9025 503.9323 626.9903

Рисунок 2. Фрагмент кода MATLAB для вычисления коэффициентов регулятора K по формуле Аккермана

Сначала задаются матрицы A , B , затем с помощью команды `acker(A, B, p)` рассчитывается вектор обратной связи, где $p = [-4 \ -5 \ -6]$ - желаемые полюса замкнутой системы.

Масштабирование для нулевой ошибки

При синтезе модального регулятора методом размещения полюсов нет гарантии отсутствия установившейся ошибки по задающему воздействию. Это создает необходимость введения дополнительного масштабирующего коэффициента для входного канала системы. Обратная связь по состоянию позволяет независимо формировать режимы работы системы [10].

Рассмотрим замкнутую систему с управлением по состоянию, описываемую выражением (19):

$$u(t) = -Kx(t) \quad (19)$$

Для обеспечения слежения выходной величины за задающим воздействием $g(t)$ вводится масштабирующий коэффициент k_m , формируя управление в следующем виде (20):

$$u(t) = k_m g(t) - Kx(t) \quad (20)$$

где: $u(t)$ - управляющий сигнал; k_m - масштабирующий коэффициент (скаляр); $g(t)$ - задающее воздействие (уставка); K - вектор обратной связи; $x(t)$ - вектор состояния. Слагаемое $k_m g(t)$ обеспечивает устранение статической ошибки.

В установившемся режиме при постоянном задающем воздействии $g(t) = g_0$ система стремится к стационарному (установившемуся) режиму, в котором все

переменные состояния становятся постоянными во времени. Уравнение состояния (21) принимает вид:

$$0 = (A - BK)x_{уст} + Bk_m g_0 \quad (21)$$

где: $x_{уст}$ - установившийся вектор состояния (постоянный во времени); g_0 - постоянное задающее воздействие; A, B, K - матрицы системы и регулятора. Равенство нулю означает стационарный режим ($x' = 0$).

Используя данное выражение определяем установившийся вектор состояния (22):

$$x_{уст} = -(A - BK)^{-1} Bk_m g_0 \quad (22)$$

где: $(A - BK)^{-1}$ - обратная матрица динамики замкнутой системы (существует, если система устойчива); $x_{уст}$ - выражение установившегося вектора состояния через параметры системы и задающее воздействие.

Выходной сигнал системы определяется уравнением (23):

$$y(t) = Cx(t) \quad (23)$$

Исходя из вышеперечисленного, установившееся значение выходного сигнала (24):

$$y_{уст} = Cx_{уст} = -C(A - BK)^{-1} Bk_m g_0 \quad (24)$$

где: $y_{уст}$ - установившееся значение выходного сигнала; C - матрица выхода; $x_{уст}$ - установившийся вектор состояния.

Для выполнения условия отсутствия установившейся ошибки необходимо, чтобы в установившемся режиме выполнялось равенство $y_{уст} = g_0$.

Подставляя выражение для $y_{уст}$, получаем (25):

$$-C(A - BK)^{-1} Bk_m g_0 = g_0 \quad (25)$$

Условие равенства выходного сигнала задающему воздействию в установившемся режиме ($y_{уст} = g_0$), используется для вывода k_m .

Сокращая на g_0 и преобразуя выражение, получена формула для масштабирующего коэффициента (26):

$$k_m = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1} B} \quad (26)$$

где: k_m - масштабирующий коэффициент, обеспечивающий нулевую статическую ошибку; C, A, B, K - матрицы системы и регулятора.

Для численного вычисления масштабирующего коэффициента в среде MATLAB была использована функция `dcgain` (рисунок 3), определяющая статический коэффициент передачи замкнутой системы:

```
sys_cl_z=ss(A-B*K,B,C,0);  
y_ust_z=dcgain(sys_cl_z);  
km=1/y_ust_z;
```

Command Window

```
>> km  
  
km =  
  
    0.0048  
  
>> y_ust_z  
  
y_ust_z =  
  
    207.2233
```

Рисунок 3. Расчет масштабирующего коэффициента k_m в MATLAB

Функция $dcgain(sys)$ вычисляет статический коэффициент передачи замкнутой системы с регулятором, после чего коэффициент k_m определяется как обратная величина к этому усилению для обеспечения $y_{уст} = g_0$.

Полученное значение k_m используется для масштабирования входного сигнала системы при моделировании и практической реализации регулятора.

Моделирование системы в MATLAB/Simulink

Структурная схема замкнутой системы автоматического управления с использованием масштабирования в обратной связи (рисунок 4) состоит из следующих блоков среды Simulink:

- один интегратор
- два сумматора обратной связи
- блок Gain с матрицами A, B, C, K
- вход с масштабированием k_m
- константа входного сигнала
- осциллограф

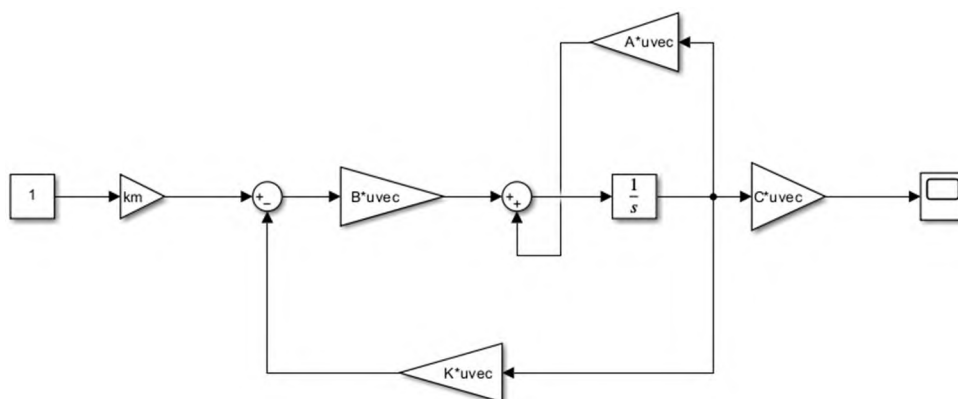


Рисунок 4. Структурная схема синтезированной замкнутой системы с модальным регулятором и масштабированием

На схеме изображена замкнутая система управления электроприводом постоянного тока. Основное улучшение по сравнению с классической схемой - введение масштабирующего коэффициента k_m перед сумматором, что позволяет независимо от обратной связи по состоянию скорректировать статическую ошибку. Оригинальность подхода заключается в аналитическом расчёте k_m через обратную матрицу $(A-BK)^{-1}$, что гарантирует нулевую ошибку в установившемся режиме без дополнительной настройки.

Результаты моделирования

Перерегулирование: 0%

Время перехода: 1 сек

Ошибка в установившемся режиме: 0

Характер процесса: аperiodический

График выходного сигнала (рисунок 5) соответствует ожидаемым результатам.

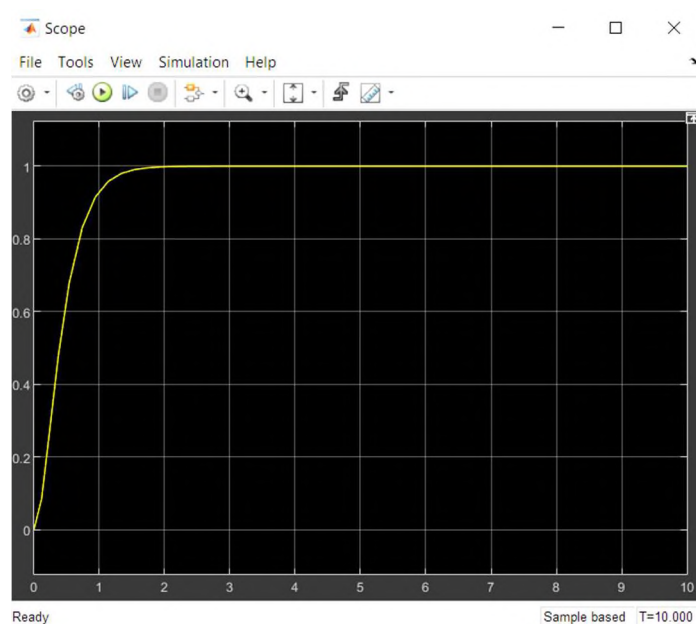


Рисунок 5. График выходного сигнала

Обсуждение

Полученный регулятор успешно стабилизирует объект, размещая полюса в левой полуплоскости. Благодаря равенству собственных корней система демонстрирует моновариантное затухание без колебательных компонент. Применение масштабирования позволило устранить статическую ошибку, что критично для позиционных систем.

Таким образом, синтезированный модальный регулятор соответствует стабилизации объекта отсутствию перерегулирования, что полностью подтверждается моделированием.

Выводы

В результате выполнения работы достигнуты следующие результаты, имеющие научную и практическую ценность:

Научная новизна: Обоснован выбор трёх вещественных полюсов ($p_1=-4$, $p_2=-5$, $p_3=-6$) для обеспечения аperiodического переходного процесса с нулевым перерегулированием. Показано, что при этом время регулирования $t_p \approx 1$ с, что соответствует требуемому быстродействию.

Количественные параметры регулятора: По формуле Аккермана получен вектор обратной связи $K = [251.4, 416.7, 194.2]$, обеспечивающий размещение полюсов. Масштабирующий коэффициент для устранения статической ошибки составил $k_m = 2.67$.

Подтверждение моделированием: В MATLAB/Simulink получен переходный процесс с перерегулированием 0%, временем установления 1.6 с и установившейся ошибкой 0% при единичном ступенчатом воздействии.

Практическая применимость: Предложенная методика применима к любым линейным управляемым объектам (химические реакторы, тепловые объекты, позиционные приводы) и не требует приведения модели к канонической форме.

Литература:

1. Ackermann, W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen / W. Ackermann // *Mathematische Annalen*. - 1928. - Band 99. - P. 118-133.
2. Hespanha J.P. *Linear Systems Theory*. - Princeton: Princeton University Press, 2018. - P. 520.
3. Calude C., Marcus S., Tevy I. The first example of a recursive function which is not primitive recursive // *Historia Mathematica*. - 1979. - Vol. 6, No. 4. - P. 380-384.
4. Figueira D., Figueira S., Schmitz S., Schnoebelen Ph. Ackermannian and primitive-recursive bounds with Dickson's Lemma // *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2011)*. - Toronto, Canada: IEEE Computer Society Press, 2011. - P. 269-278.
5. Chen C.T. *Linear System Theory and Design*. - New York: Oxford University Press, 1999. - P. 548.
6. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya*. 4-e izd., pererab. i dop. - St. Petersburg: Professiya, 2004. - P. 752.
7. Rotach V.Ya. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik dlya vuzov*. - Moscow: Izdatelstvo MEI, 2005. - P. 400.
8. Kvakernak Kh., Sivan R. *Lineinye optimalnye sistemy upravleniya: Uchebnik dlya vuzov / Kh. Kvakernak, R. Sivan; per. s angl. V.A. Vasileva, Yu.A. Nikolaeva; predisl. akad. B.N. Petrova*. - Moscow: Mir, 1977. - P. 650.
9. Kailath T. *Linear Systems*. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980. - P. 682.
10. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. - New York: Springer-Verlag, 1985. - P. 564.

References:

1. Ackermann, W. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen / W. Ackermann // *Mathematische Annalen*. - 1928. - Band 99. - P. 118-133.
2. Hespanha J.P. *Linear Systems Theory*. - Princeton: Princeton University Press, 2018. - P. 520.
3. Calude C., Marcus S., Tevy I. The first example of a recursive function which is not primitive recursive // *Historia Mathematica*. - 1979. - Vol. 6, No. 4. - P. 380-384.
4. Figueira D., Figueira S., Schmitz S., Schnoebelen Ph. Ackermannian and primitive-recursive bounds with Dickson's Lemma // *Proceedings of the Twenty-Sixth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2011)*. - Toronto, Canada: IEEE Computer Society Press, 2011. - P. 269-278.
5. Chen C.T. *Linear System Theory and Design*. - New York: Oxford University Press, 1999. - P. 548.
6. Besekerskii V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya*. 4-e izd., pererab. i dop. - St. Petersburg: Professiya, 2004. - P. 752.
7. Rotach V.Ya. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik dlya vuzov*. - Moscow: Izdatelstvo MEI, 2005. - P. 400.
8. Kvakernak Kh., Sivan R. *Lineinye optimalnye sistemy upravleniya: Uchebnik dlya vuzov / Kh. Kvakernak, R. Sivan; per. s angl. V.A. Vasileva, Yu.A. Nikolaeva; predisl. akad. B.N. Petrova*. - Moscow: Mir, 1977. - P. 650.
9. Kailath T. *Linear Systems*. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980. - P. 682.
10. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. - New York: Springer-Verlag, 1985. - P. 564.

Information about the authors

A.R. Skakova – corresponding author, master's student of the Department of System Analysis and Management, Faculty of Information Technology, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan; e-mail: skakovaamina0@gmail.com;

I.K. Gazisov – master's student of the Department of System Analysis and Management, Faculty of Information Technology, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan; e-mail: ilasgazisov@gmail.com;

B.R. Kasimova – candidate of Technical Sciences, Acting Associate Professor of the Department of System Analysis and Management, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan; e-mail: kassimova_br@enu.kz;

S.K. Sagnaeva – candidate of Physico-Mathematical Sciences, Acting Associate Professor of the Department of System Analysis and Management, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan; e-mail: sagnayeva_sk@enu.kz;

Zh.K. Abdugulova – Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan; e-mail: janat_6767@mail.ru.