

DOI 10.54596/2958-0048-2025-3-110-116

УДК 372.851

МРНТИ 14.25.09

К ВОПРОСУ О МЕТОДЕ ИНТЕРВАЛОВ**Чугунова А.А.^{1*}**^{1*}*НАО «Северо-Казахстанский университет имени Манаша Козыбаева»,
Петропавловск, Казахстан***Автор для корреспонденции: anna030867@mail.ru***Аннотация**

Данная статья посвящена вопросу обучения студентов – будущих учителей математики теме «Метод интервалов». Метод интервалов является универсальным методом решения различных видов неравенств и их систем. В статье обозначена проблема низкой результативности при решении неравенств различных типов методом интервалов студентами первого курса при изучении дисциплины «Элементарная математика» и предлагаются пути решения этой проблемы.

Ключевые слова: неравенство, дробно-рациональное неравенство, тригонометрическое, логарифмическое неравенство, метод интервалов.

ИНТЕРВАЛДЫҚ ӘДІС ТУРАЛЫ**Чугунова А.А.^{1*}**^{1*}*«Манаш Қозыбаев атындағы Солтүстік Қазақстан университеті» КеАҚ,
Петропавл, Қазақстан***Хат-хабар үшін автор: anna030867@mail.ru***Аңдатпа**

Бұл мақала студенттерге – болашақ математика мұғалімдеріне – «Интервалдық әдіс» тақырыбын оқыту мәселесіне арналған. Интервалдық әдіс – әртүрлі типтегі теңсіздіктерді және олардың жүйелерін шешудің әмбебап әдісі. Мақалада «Бастауыш математика» пәнін оқитын 1 курс студенттерінің интервалдық әдісті қолдану арқылы әртүрлі типтегі теңсіздіктерді шешудегі тиімділігінің төмендігі мәселесі анықталып, осы есепті шешу жолдары ұсынылған.

Кілт сөздер: теңсіздік, бөлшек рационал теңсіздік, тригонометриялық, логарифмдік теңсіздік, интервал әдісі.

ON THE QUESTION OF THE INTERVAL METHOD**Чугунова А.А.^{1*}**^{1*}*Manash Kozybayev North Kazakhstan University NPLC, Petropavlovsk, Kazakhstan***Corresponding author: anna030867@mail.ru***Abstract**

This article is devoted to the issue of teaching students - future teachers of mathematics the topic "Interval Method". The interval method is a universal method for solving various types of inequalities and their systems. The article identifies the problem of low efficiency in solving inequalities of various types by the interval method by first-year students when studying the discipline "Elementary Mathematics" and suggests ways to solve this problem

Keywords: nequality, fractional rational inequality, trigonometric, logarithmic inequality, interval method.

Введение

Метод интервалов – один из универсальных методов решения рациональных, дробно-рациональных неравенств. Изучение этого метода решения неравенств школьники начинают в восьмом классе на примере квадратных неравенств и дробно-рациональных неравенств. Затем школьные учебники забывают об методе интервалов. Обучающиеся, при подготовке к сдаче Единого национального тестирования, вспоминают о данном методе решения неравенств, чаще всего с подачи учителя. Анализируя навык решения неравенств в рамках дисциплины «Элементарная математика» приходится констатировать, что выпускники школ не владеют данным методом решения неравенств в совершенстве. Многие первокурсники испытывают затруднения при решении дробно-рациональных неравенств, и не пытаются использовать метод интервалов для решения неравенств других типов. Чтобы изменить эту ситуацию к лучшему, необходимо чтобы этот метод стал понятен, в первую очередь, учителю, следовательно, при обучении студентов – будущих учителей математики, данному методу необходимо уделить пристольное внимание.

Материалы и методы исследования

Для исследования вопросов, связанных с методическими особенностями обучения решению неравенств методом интервалов, были применены следующие методы: анализ школьных учебников, учебной и учебно-методической литературы, педагогическое наблюдение, собеседование. В педагогическом наблюдении принимали участие студенты первого и второго курсов – будущие учителя математики.

Результаты исследования

Вопрос применения метода интервалов для решения неравенств и их систем широко обсуждается в научной и учебно-методической литературе [1, 2, 3, 4]. Умение решать задачи с применением метода интервалов актуально в связи с необходимостью выпускников школ сдавать Единое национальное тестирование (далее ЕНТ) и быстро решать различные неравенства и их системы.

Почему школьники с осторожностью используют метод интервалов? Мы провели анализ школьных учебников. Впервые с методом интервалов школьники знакомятся в 8 классе. В школах Республики Казахстан для учащихся 8 классов используются три основных учебника [5, 6, 7]. Анализ этих учебников позволил выявить что существует два основных подхода к изучению метода интервалов:

1) на основе применения метода интервалов на конкретном примере (впервые для решения квадратных неравенств) [5]. В ходе решения примера выполняется последовательность действий, на основе которых определяется алгоритм метода интервалов. Приведем пример решения квадратного неравенства $2x^2 + 3x - 5 > 0$, так как предлагается в учебнике. При решении этого неравенства предлагается выполнить последовательность следующих действий:

1. Решим квадратное уравнение $2x^2 + 3x - 5 = 0$
2. Корни этого уравнения $x = 1, x = -2.5$ разбивают числовую ось на три интервала. На каждом из них исследуем знак квадратного трехчлена $2x^2 - 3x + 5$.
3. Изобразим числовую прямую (рисунок 1)

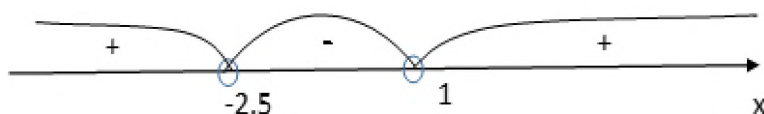


Рисунок 1. Решение рационального неравенства

4. Ответ задачи будет таким: $x \in (-\infty; -2.5) \cup (1; +\infty)$.

После выполнения всех этих этапов учитель в ходе дальнейшего решения неравенств должен сформировать у учеников алгоритм применения метода интервалов.

2) изучаются теоретические основы метода интервалов для определенного класса неравенств (квадратные, рациональные, дробно-рациональные) [6, 7].

Дальнейший анализ школьных учебников показал, что при решении тригонометрических неравенств (9 класс), показательных и логарифмических неравенств (11 класс) в школьных учебниках метод интервалов не заслуженно забыт. Его используют только при решении квадратных неравенств относительно одной из тригонометрических (логарифмических и показательных) функций. Однако в перечне заданий для Единого национального тестирования имеются неравенства или системы неравенств для решения которых применяется метод интервалов.

Приведем пример такого задания. Данное задание представлено в перечне заданий для подготовки к ЕНТ по математике (Источник: Реальная версия ЕНТ по математике 2021 года, вариант 4123) [8].

Задание: решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{x+1}{\log_2(x-1)} > 0 \\ \log_{11}(x^2 + 7) < \log_{11}(6x - 1). \end{cases}$$

Чтобы решить систему неравенств необходимо решить в первую очередь каждое неравенство системы. Второе неравенство решается без использования метода интервалов. Большинство студентов первого курса специальности «БВ01508 Математика-информатика», которым было предложено решить первое неравенство системы, решали его без использования метода интервалов.

Приведем пример этого решения:

$$\frac{x+1}{\log_2(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2(x-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (x-1) < 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 2.$$

Определить решение неравенства необходимо с учетом области допустимых значений этого неравенства:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Следовательно, получаем, что решение неравенства: $x > 2$.

Решение этого неравенства методом интервалов выглядит так:

1) найдем область допустимых значений переменных выражения $\frac{x+1}{\log_2(x-1)}$:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

- 2) найдем нули числителя: $x + 1 = 0 \leftrightarrow x = -1$.
 3) найдем нули знаменателя: $\log_2(x - 1) = 0 \leftrightarrow x - 1 = 1 \leftrightarrow x = 2$.
 4) изобразим числовую прямую, и исследуем знак выражения $\frac{x+1}{\log_2(x-1)}$ на интервалах с учетом ОДЗ (рисунок 2):



Рисунок 2. Решение логарифмического неравенства

На промежутке $(-\infty; 1)$ знак выражения не указан, данный промежуток не принадлежит области допустимых значений неравенства. Следовательно, решение неравенства: $x > 2$.

Таким образом, при решении данного неравенства методом интервалов можно сократить время его решения. В условиях ЕНТ это очень важно.

На протяжении нескольких лет для выявления проблем связанных с решением неравенств, для разработки лекционного и практического материала по дисциплине «Элементарная математика» осуществлялся анализ общей и специальной литературы по проблеме исследования, проводились наблюдения за ходом процесса обучения по дисциплине и работой студентов на занятиях, беседы со студентами. В ходе бесед со студентами выяснилось, что метод интервалов является для них сложным методом, большие проблемы вызывают те неравенства, в ходе решения которых среди корней выражения $f(x)$ имеются кратные корни. Применять метод интервалов для решения некоторых трансцендентных неравенств студентам хотелось бы научиться.

В программу учебной дисциплины «Элементарная математика» включены для изучения вопросы, связанные с решением дробно-рациональных неравенств, тригонометрических неравенств, логарифмических неравенств. Лекционный материал содержит примеры, на основе которых вводится метод решения рациональных и дробно-рациональных, тригонометрических, логарифмических, показательных неравенств, особенности использования правила чередования знаков. Приведем пример решения тригонометрического неравенства.

Пример 1: решите неравенство методом интервалов $\sin 2x(\cos 3x - 1) < 0$. [9]

Решение: функции $y = \sin 2x$; $y = \cos 3x - 1$ имеют период $T = 2\pi$.

1) найдем нули каждой функции:

$$\sin 2x = 0 \leftrightarrow 2x = \pi k \leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3x - 1 = 0 \leftrightarrow \cos 3x = 1 \leftrightarrow 3x = 2\pi m \leftrightarrow x = \frac{2\pi m}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

2) Нули функции $y = \sin 2x$: $x = \frac{\pi k}{2}$, на промежутке $[0; 2\pi)$ имеется 4 нуля.

$$k = 0, x = 0; k = 1, x = \frac{\pi}{2}; k = 2, x = \pi; k = 3, x = \frac{3\pi}{2}.$$

3) Нули множителя $y = \cos 3x - 1$: $x = \frac{2\pi m}{3}$, на промежутке $[0; 2\pi)$ имеется 3 нуля.

$$m = 0, x = 0; m = 1, x = \frac{2\pi}{3}; m = 2, x = \frac{4\pi}{3}.$$

Объединим нули каждого множителя в таблицу (таблица 1), и выясним какие из них имеют четную кратность:

Таблица 1. Исследование критических точек

$\sin 2x$	0	$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\cos 3x - 1$	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$	

Точка $x = 0$ является подозрительной на четную кратность точкой, и требует дополнительного исследования.

Для функции $y = \sin 2x$ ее нули являются простыми так как $y' = 2 \cos 2x$ и $y'(0) = 2 \cos(2 \cdot 0) = 2$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = -2$, $y'(\pi) = 2 \cos(2 \cdot \pi) = 2$, $y'(\frac{3\pi}{2}) = 2 \cos(2 \cdot \frac{3\pi}{2}) = -2$ отличны от нуля.

Для функции $y = \cos 3x - 1$, точка $x = 0$ является нулем кратности $k=2$ так как $y' = -3 \sin 3x$ и $y'(0) = -3 \sin 0 = 0$, $y'' = -9 \cos 3x$, $y''(0) = -9 \cos(3 \cdot 0) = -9$.

Для функции $y = \cos 3x - 1$, точка $x = \frac{2\pi}{3}$ является нулем кратности $k=2$ так как $y' = -3 \sin 3x$ и $y'(\frac{2\pi}{3}) = -3 \sin(3 \cdot \frac{2\pi}{3}) = 0$, $y'' = -9 \cos 3x$, $y''(\frac{2\pi}{3}) = -9 \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{3}) = -9$. Аналогично доказывается, что точка $x = \frac{4\pi}{3}$ является нулем кратности $k=2$.

Таким образом точка $x = 0$ является точкой простой кратности, а точки $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = \frac{4\pi}{3}$ являются нулем кратности $k=2$.

Изобразим нули на окружности. Определим знаки на одном из интервалов и расставим знаки на каждом из полученных интервалов (рисунок 3).

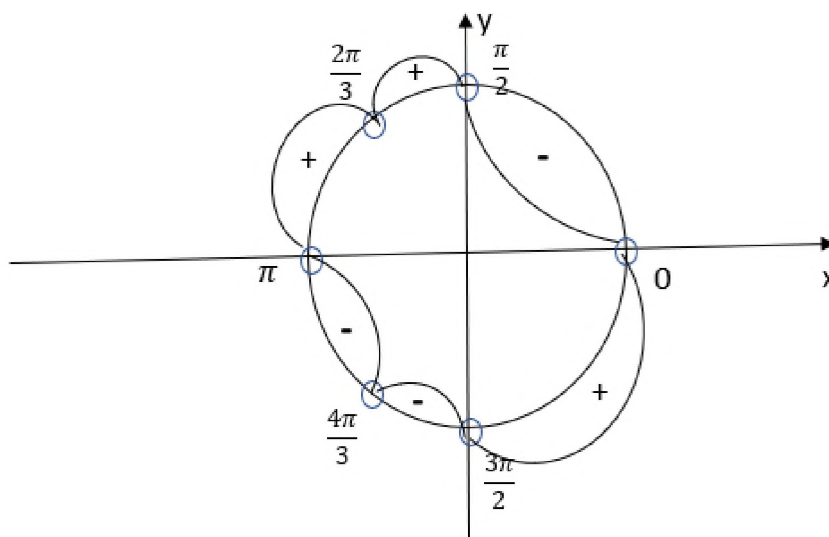


Рисунок 3. Решение тригонометрического неравенства

Решением данного неравенства является объединение следующих промежутков:

$$x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

В течении периода обучения осуществлялся анализ качества выполненных контрольных работ. Результаты контрольных работ показывают, что студенты за ограниченное рамками учебной дисциплины время, не усваивают в полном объеме метод интервалов, не применяют его для решения более сложных неравенств. Следовательно, для того чтобы студенты освоили алгоритм метода интервалов и с уверенностью применяли его при решении различных видов неравенств необходимо вносить изменения в учебный процесс. Необходимо увеличить время на отработку данного метода в рамках учебных дисциплин, или изменить отношение к методу интервалов в школьной практике как учителей математики, так и школьников.

Обсуждение

Каким образом можно изменить качество обучения школьников математике? На наш взгляд необходимо в первую очередь внести изменение в подготовку студентов – будущих учителей математики. Ведь хорошо известно, если учитель при решении задач не применяет соответствующий метод решения, то и ученики не будут его применять при решении данных задач. Процесс обучения студентов можно изменить за счет внесения изменений в рабочую учебную программу дисциплины «Элементарная математика», увеличив количество часов, отведенных на изучение темы «Неравенства». Однако, у студентов первого курса существуют сложности и с решением задач из других разделов математики. Следовательно, необходимо вносить изменение и в другие профильные дисциплины или создавать курсы по выбору для студентов заинтересованных в изучении различных методов решения задач [10].

Необходимо обратить внимание на возможности курсов повышения квалификации для молодых педагогов. Организации, обеспечивающие повышение квалификации для учителей школ, при содействии опытных педагогов и преподавателей вуза могут подготовить курсы, направленные на глубокое усвоение метода интервалов.

Кроме того, при обучении школьников решению неравенств учитель несомненно должен доказать своим ученикам универсальность метода интервалов. Данный метод может быть применен к любому неравенству вида $F(x) > 0, F(x) < 0$, если функцию, стоящую в левой части неравенства, можно разложить на множители и найти ее нули.

Заключение

На основании вышеизложенного, результатов наблюдения за процессом обучения и работой студентов на занятиях можно сделать вывод:

1) Метод интервалов находит свое применение при решении широкого круга задач, т.е. является одним из универсальных методов решения различных видов неравенств.

2) Метод интервалов недостаточно изучается в курсе школьной математики.

3) Для успешного освоения метода интервалов необходимо внести изменение в процесс обучения школьников и студентов.

Метод интервалов остается одним из важных методов решения различных видов неравенств и их систем, который развивает аналитические способности школьников. Изучение этого метода студентами – будущими учителями математики является одной из важных составляющих их будущих профессиональных успехов, и успехов их учеников.

Литература:

1. Г.В. Дорофеев. Обобщение метода интервалов. - Математика в школе. – 1969. - №3. - С. 39-44.
2. Клещев, В.А. Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности / В.А. Клещев, Математика в школе. – 1992. - №6. - С. 17-18.
3. Егоров А., Раббот Ж. Монотонные функции в конкурсных задачах / А. Егоров. – Квант. – 2002. - №6. - С. 34-40.
4. Сиротина И.К., Гумбар В.Г., Кулакевич Д.В. Решение неравенств методом интервалов: справочное пособие к решению задач. – Барановичи: РИО БарГУ, 2008. – 112 с.
5. Алгебра: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы / А.Н. Шыныбеков, Д.А. Шыныбеков, Р.Н. Жумабаев – Алматы: Атамұра, 2018. – 208 с.
6. Алгебра: учебник для 8 класса общеобразовательной школы / А.Е. Абылкасымова, Т.П. Кучер, В.Е. Корчевский, З.А. Жумагулова. – Алматы: Мектеп, 2018. – 200 с.
7. Алгебра: учебник для учащихся 8 класса общеобразовательной школы + CD / Г.Н. Солтан, А.Е. Солтан, А.Ж.Жумадилова. – Кокшетау: Кешелек – 2030, 2018. - 216 с.
8. Образовательный портал для подготовки к тестированию: [Электронный ресурс]. URL: <https://reshuent.kz/test?theme=53>
9. И.П. Рустюмова, С.Т. Рустюмова. Тренажер по математике для подготовки к единому национальному тестированию (ЕНТ). Часть 3. Издание первое. – Алматы, 2013. – 516 с.
10. Н.Е. Ляхова Основные положения построения курса по выбору «Метод интервалов, метод областей и их приложения» / Вестник ТГПИ. Физико-математические и естественные науки. - 2013. - №1. - С. 73-79.

References:

1. G.V. Dorofeyev. Obobshcheniye metoda intervalov., Matematika v shkole. – 1969. - №3. - S. 39-44.
2. Kleshchev, V.A. Obobshcheniye metoda intervalov na trigonometricheskoy okruzhnosti / V.A. Kleshchev, Matematika v shkole. - 1992. - №6. - S. 17-18.
3. Yegorov A., Rabbot Zh. Monotonnyye funktsii v konkursnykh zadachakh / A. Yegorov. – Kvant. – 2002. - №6. - S. 34-40.
4. Sirotina I.K., Gumbar V.G., Kulakevich D.V. Resheniye neravenstv metodom intervalov: spravочноye posobiye k resheniyu zadach. – Baranovichy: RIO BarGU, 2008. – 112 s.
5. Algebra: uchebnik dlya uchashchikhsya 8klassa obshcheobrazovatel'noy shkoly / A.N. Shynybekov, D.A. Shynybekov, R.N. Zhumabayev – Almaty: Atamūra, 2018. – 208 s.
6. Algebra: uchebnik dlya 8klassa obshcheobrazovatel'noy shkoly / A.Ye. Abylkasymova, T.P. Kucher, V.Ye. Korchevskiy, Z.A. Zhumagulova. – Almaty: Mektep, 2018. – 200 s.
7. Algebra: uchebnik dlya uchashchikhsya 8klassa obshcheobrazovatel'noy shkoly + CD / G.N. Soltan, A.Ye. Soltan, A.Zh. Zhumadilova. – Kokshetau: Keshelek – 2030, 2018. - 216 s.
8. Obrazovatel'nyy portal dlya podgotovki k testirovaniyu: [Elektronnyy resurs]. URL: <https://reshuent.kz/test?theme=53>
9. I.P. Rustyumova, S.T. Rustyumova. Trenazher po matematike dlya podgotovki k yedinomu natsional'nomu testirovaniyu (YENT). Chast' 3. Izdaniye pervoye. – Almaty, 2013. – 516 s.
10. N.E. Lyakhova Basic principles of constructing the elective course "Interval method, region method and their applications" / Bulletin of TGPI. Physical, mathematical and natural sciences. – 2013. - No. 1. - pp. 73-79.

Information about the author:

Chugunova A.A. – Corresponding author, PhD, Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, Kozymbayev University, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: anna030867@mail.ru.