

DOI 10.54596/2958-0048-2025-3-193-205

UDK 372.851

IRSTI 14.35.09

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ: КАК МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ РОЯ
ПРЕВРАЩАЮТСЯ В РОЕВОЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ПОЗВОЛЯЮТ СТРОИТЬ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНУЮ ТРАЕКТОРИЮ ОБУЧЕНИЯ**

Копнова О.Л.^{1*}, Таджигитов А.А.¹, Григоренко О.В.²

^{1*}*НАО «Северо-Казахстанский университет имени Манаша Козыбаева»,
Петропавловск, Казахстан*

²*Сибирский государственный университета геосистем и технологий,
Новосибирск, Россия*

**Автор для корреспонденции: oksanakopnova@gmail.com*

Аннотация

Статья исследует феномен математической сингулярности в контексте роевого интеллекта и его применение для построения адаптивных образовательных траекторий. На примере модели движения муравьиной колонии (Ant Colony Optimization) демонстрируется, как локальные взаимодействия агентов приводят к глобально оптимальным решениям, преодолевая ограничения индивидуального поведения. Анализируется аналогия между поиском кратчайшего пути в природе и выбором персонализированной траектории обучения. Рассматриваются технологические и этические аспекты внедрения роевых алгоритмов в образовательные системы, а также перспективы создания самоорганизующихся платформ, способных адаптироваться к потребностям учащихся. Статья подчеркивает, что сингулярность в роевых системах открывает путь к созданию "умных" образовательных сред, где траектории формируются не сверху вниз, а через взаимодействие учащихся, данных и адаптивных алгоритмов.

Ключевые слова: Роевой интеллект, математическая сингулярность, образовательные траектории, интеллектуальные системы обучения, персонализированное обучение.

**МАТЕМАТИКАЛЫҚ СИНГУЛЯРЛЫҚ: ҮЙІРДІҢ МІНЕЗ-ҚҰЛЫҚ ҮЛГІЛЕРІ
ҮЙІР ИНТЕЛЛЕКТІНЕ ҚАЛАЙ АЙНАЛАДЫ ЖӘНЕ ОҚЫТУДЫҢ БІЛІМ БЕРУ
ТРАЕКТОРИЯСЫН ҚҰРУҒА МҮМКІНДІК БЕРЕДІ**

Копнова О.Л.^{1*}, Таджигитов А.А.¹, Григоренко О.В.²

^{1*}*«Манаш Қозыбаев атындағы Солтүстік Қазақстан университеті» КеАҚ,
Петропавл, Қазақстан*

²*Сібір мемлекеттік геожүйелер және технологиялар университеті,
Новосибирск, Ресей*

**Хат-хабар үшін автор: oksanakopnova@gmail.com*

Аңдатпа

Мақалада үйір интеллект контекстіндегі математикалық сингулярлық құбылысы және оның адаптивті білім беру траекторияларын құру үшін қолданылуы зерттеледі. Құмырскалар колониясының қозғалыс моделінің мысалында (Ant Colony Optimization) агенттердің жергілікті өзара әрекеттесуі жеке мінез-құлық шектеулерін еңсеру арқылы жаһандық оңтайлы шешімдерге қалай әкелетінін көрсетеді. Табиғаттағы ең қысқа жолды табу мен жекелендірілген оқыту траекториясын таңдау арасындағы ұқсастық талданады. Білім беру жүйелеріне үйір алгоритмдерін енгізудің технологиялық және этикалық аспектілері, сондай-ақ оқушылардың қажеттіліктеріне бейімделе алатын өзін-өзі ұйымдастыратын платформалар құру перспективалары қарастырылады. Мақалада топтық жүйелердегі сингулярлық траекториялар жоғарыдан төмен емес, оқушылардың, деректердің және бейімделу алгоритмдерінің өзара әрекеттесуі арқылы қалыптасатын "ақылды" білім беру орталарын құруға жол ашатынын атап көрсетеді.

Кілт сөздер үйір интеллект, математикалық сингулярлық, білім беру траекториялары, интеллектуалды оқыту жүйелері, жекелендірілген.

**MATHEMATICAL SINGULARITY: HOW SWARM BEHAVIOUR MODELS
TURN INTO SWARM INTELLIGENCE AND ALLOW BUILDING EDUCATIONAL
TRAJECTORY OF LEARNING****Kopnova O.L.^{1*}, Tadzhigitov A.A.¹, Grigorenko O.V.²**^{1*}*Manash Kozybayev North Kazakhstan University NPLC, Petropavlovsk, Kazakhstan*²*Siberian State University of Geosystems and Technology, Novosibirsk, Russia***Corresponding author: oksanakopnova@gmail.com***Abstract**

The article investigates the phenomenon of mathematical singularity in the context of swarm intelligence and its application to the construction of adaptive educational trajectories. Using the example of the ant colony movement model (Ant Colony Optimisation), it is demonstrated how local interactions between agents lead to globally optimal solutions, overcoming the limitations of individual behaviour. An analogy between finding the shortest path in nature and choosing a personalised learning trajectory is analysed. The technological and ethical aspects of introducing swarm algorithms into educational systems are discussed, as well as the prospects of creating self-organising platforms capable of adapting to learners' needs. The article emphasises that singularity in swarm systems opens the way to the creation of smart educational environments where trajectories are not shaped from the top down, but through the interaction of learners, data and adaptive algorithms

Keywords: Swarm intelligence, mathematical singularity, educational trajectories, intelligent learning systems, personalised learning.

Введение

Современные вызовы образования, связанные с персонализацией обучения и ростом объемов данных, требуют принципиально новых подходов к проектированию учебных траекторий. Одним из перспективных направлений становится заимствование принципов роевого интеллекта (Swarm Intelligence, SI) – области искусственного интеллекта, изучающей коллективное поведение децентрализованных систем, таких как муравьиные колонии или стаи птиц. Эти системы демонстрируют удивительную способность к самоорганизации, где простые локальные взаимодействия агентов приводят к глобально оптимальным решениям. Ключевым моментом в этом процессе является математическая сингулярность – критическая точка, в которой система преодолевает хаос индивидуальных действий и переходит в упорядоченное состояние, обретая свойства коллективного разума. Несмотря на достижения в персонализированном обучении, современные образовательные системы часто испытывают трудности с динамической адаптацией к индивидуальным потребностям учащихся и использованием коллективного опыта обучения, что приводит к неоптимальным образовательным траекториям. Данная работа посвящена решению проблемы создания высокоадаптивных и самоорганизующихся образовательных сред путем предложения новой концепции, основанной на математической сингулярности и принципах роевого интеллекта.

На примере алгоритма муравьиной колонии (ACO) можно наблюдать, как сингулярность проявляется в резком изменении поведения системы: случайные блуждания отдельных муравьев трансформируются в выбор кратчайшего пути благодаря накоплению феромонов. Этот феномен, основанный на нелинейной динамике и положительной обратной связи, становится метафорой для образовательных процессов. Если рассматривать учащихся как «агентов», а их учебные предпочтения и успехи – как «феромоны», возникает возможность моделирования адаптивных траекторий обучения, где индивидуальный выбор усиливается коллективным опытом.

Цель данной статьи – исследовать, как принципы математической сингулярности и роевого интеллекта могут быть применены для построения образовательных систем нового типа. Мы покажем, что переход от хаотичного поиска к структурированному обучению аналогичен фазовому переходу в природных роевых системах, а также предложим модель динамической настройки учебных маршрутов на основе алгоритмов АСО. Такой подход не только повышает эффективность обучения, но и создает основу для самоорганизующихся образовательных экосистем, где каждый участник одновременно влияет на систему и адаптируется к ней.

Гипотеза: модели роевого интеллекта, основанные на принципе математической сингулярности, могут быть эффективно адаптированы для проектирования персонализированных образовательных траекторий, обеспечивая более высокую адаптивность и эффективность обучения по сравнению с традиционными подходами.

Роевой интеллект представляет собой направление искусственного интеллекта, изучающее коллективное поведение децентрализованных и самоорганизующихся систем, состоящих из множества простых агентов. В последние годы наблюдается рост интереса к применению алгоритмов роевого интеллекта в образовательной сфере, особенно в контексте построения индивидуальных образовательных траекторий и анализа образовательных данных. В образовательных траекториях можно применить несколько конкретных методов роевого интеллекта, которые позволяют решать задачи персонификации обучения и анализа данных. Рассмотрим наиболее подходящие из них:

Муравьиный алгоритм. Этот метод основан на моделировании поведения муравьев при поиске кратчайшего пути между источником пищи и гнездом с использованием феромонных следов. В контексте образования муравьиный алгоритм может быть использован для построения оптимальной образовательной траектории, где «феромоны» представляют собой данные об успехах или предпочтениях учащихся. Например, выбор курса или темы может зависеть от «следов», оставленных успешными студентами, что позволяет новым учащимся двигаться по наиболее эффективному пути

Метод роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO). Метод роя частиц имитирует коллективное поведение частиц, которые перемещаются в многомерном пространстве поиска решений. В образовании этот метод может быть полезен для создания персонализированных учебных планов: каждая "частица" представляет возможную траекторию обучения, а глобальный и локальный оптимумы помогают найти наиболее подходящий путь для конкретного студента

Пчелиный алгоритм. Этот алгоритм моделирует поведение пчел при поиске источников нектара. В образовательном контексте он может применяться для анализа больших объемов данных о предпочтениях и успехах учащихся, чтобы идентифицировать наиболее эффективные стратегии обучения. Например, "пчелы-разведчики" могут исследовать различные образовательные ресурсы, а "рабочие пчелы" — анализировать их полезность для группы студентов.

Алгоритмы искусственной иммунной системы. Эти алгоритмы вдохновлены биологическими иммунными системами и могут использоваться для адаптивного реагирования на изменения в образовательной среде. Например, они помогают выявлять слабые места в обучении и предлагать корректирующие меры, аналогично тому, как иммунная система борется с инфекциями.

Эволюционные алгоритмы. Эволюционные методы, такие как генетические алгоритмы, также могут быть применены для оптимизации образовательных траекторий. Они моделируют естественный отбор и используют механизмы мутации и кроссовера

для поиска лучших решений. В образовании это может быть использовано для формирования групп студентов с учетом их сильных сторон или совместимости.

Стохастические эвристические методы. К таким методам относятся алгоритмы, основанные на случайных процессах, например, алгоритм имитации отжига. Они могут быть полезны для поиска компромиссных решений в условиях неопределенности, например, при формировании гибридных образовательных программ

Применение методов роевого интеллекта в образовательных траекториях позволяет создавать динамические, адаптивные системы обучения, которые учитывают как индивидуальные особенности учащихся, так и коллективные тренды

Материалы и методы исследования

Математическая сингулярность в контексте сложных систем определяется как точка или область, в которых традиционные аналитические методы и стандартные математические модели перестают быть применимыми или дают неопределённые, расходящиеся результаты. В этой точке наблюдается нарушение гладкости описываемых функций или разрыв их производных, что часто свидетельствует о фундаментальном изменении динамики системы. В классическом понимании, сингулярностью называют точку, в которой функция теряет свои обычные свойства, например, становится неограниченной или не дифференцируемой. Аналогичным образом, в моделях сложных систем возникают состояния, где стандартные аналитические методы не позволяют получить корректное описание поведения системы.

В динамических системах сингулярность может интерпретироваться как критическая точка (или точка бифуркации), при достижении которой система испытывает качественные изменения в своей динамике. Это может проявляться в виде резкого перехода от одного режима поведения к другому, например, при возникновении хаотической динамики или изменении устойчивости равновесия.

Сложные системы часто моделируются с использованием нелинейных уравнений, которые могут иметь сингулярные решения. В таких случаях сингулярности сигнализируют о предельном состоянии, за пределами которого исходная модель утрачивает адекватность описания, требуя применения альтернативных подходов, таких как регуляризация или использование численных методов.

Применение концепции математической сингулярности в образовательных системах представляет собой интересный междисциплинарный подход, позволяющий анализировать и прогнозировать критические изменения в динамике образовательного процесса. Данный подход основывается на идеях, заимствованных из теории сложных систем и нелинейной динамики, где сингулярность выступает как индикатор резкого качественного перехода системы.

2.1. Концептуальная основа: Математическая сингулярность в образовании

Понятие математической сингулярности традиционно относится к точкам, где математическая функция ведет себя необычно – например, стремится к бесконечности, теряет гладкость или единственность решения. В физике и технических науках сингулярности часто ассоциируются с критическими точками, фазовыми переходами или моментами резких, качественных изменений в системе [1]. Применительно к роевым системам, сингулярность может проявляться как порог, после которого локальные взаимодействия агентов приводят к спонтанному возникновению сложного, глобально упорядоченного поведения, непредсказуемого на основе анализа отдельных компонентов [2, 10]. Это означает, что при достижении определенных условий (критической массы агентов, интенсивности взаимодействия, качества информации)

система претерпевает качественный скачок, переходя от хаотического состояния к организованному и целенаправленному поведению.

В образовательном контексте мы предлагаем рассматривать математическую сингулярность как аналогичные критические точки или фазовые переходы в процессе обучения и развития индивида или группы. Эти "образовательные сингулярности" проявляются как моменты, когда:

Резкое изменение уровня усвоения материала: Студент, столкнувшись с новой концепцией, может испытывать затруднения, но после получения критического объема информации или озарения, происходит резкий скачок в понимании и усвоении материала. Это точка, где количественное накопление знаний переходит в качественный прорыв в понимании.

Точки бифуркации в траектории обучения: Моменты, когда студент принимает ключевые решения, кардинально меняющие его образовательный путь. Например, выбор специализации, переход на другой факультет, решение освоить новый навык, что приводит к формированию совершенно иной, ранее не существовавшей траектории.

Моменты перехода к новому уровню знаний или компетенций: Это может быть переход от пассивного восприятия к активному применению знаний, формирование новых связей между ранее разрозненными концепциями, или достижение уровня, когда студент способен самостоятельно генерировать новые идеи. Такие моменты часто сопровождаются изменением поведения и мотивации.

Коллективное обучение и формирование "общего знания": В групповом обучении сингулярность может наблюдаться, когда индивидуальные знания и взаимодействия между учащимися приводят к эмерджентному формированию коллективного понимания или "коллективного интеллекта", который превосходит сумму знаний отдельных участников.

Применение роевого интеллекта для проектирования траекторий обусловлено именно способностью эффективно работать с такими "сингулярными" состояниями и переходами. Традиционные адаптивные системы часто работают на основе предопределенных правил и линейных моделей, что делает их неэффективными в условиях нелинейности и непредсказуемости "сингулярных" моментов в обучении. Роевые алгоритмы, напротив, изначально спроектированы для систем, где:

Сложность и нелинейность: Они способны находить оптимальные решения в высокоразмерных, нелинейных пространствах, характерных для образовательных траекторий, где множество факторов (предпочтения студента, темп обучения, сложность материала, взаимодействия с другими студентами) динамически влияют на результат [18].

Эмерджентность и самоорганизация: Роевой интеллект позволяет траекториям обучения не быть жестко заданными сверху, а эмерджентно формироваться через локальные взаимодействия "агентов" (студентов, образовательных модулей, данных об успеваемости). Это позволяет системе адаптироваться к "сингулярным" изменениям в поведении или потребностях студентов, формируя наиболее эффективные пути обучения в реальном времени. Аналогично тому, как муравьиная колония обнаруживает кратчайший путь к пище после множества локальных взаимодействий, система может выявить оптимальные образовательные траектории, проходящие через "сингулярные" точки роста [4].

Устойчивость к неопределенности: в условиях неполной информации и постоянных изменений (что характерно для образования), роевые алгоритмы

демонстрируют высокую устойчивость и способность к самовосстановлению, находя новые оптимальные решения даже при изменении начальных условий или "целей" [10].

Идентификация и использование "сигналов": Роевые системы, такие как АСО, используют механизм "феромона" для усиления успешных путей. В образовании это позволяет системе "усиливать" и рекомендовать те траектории, которые приводят к успешным "сингулярным" прорывам в обучении, основываясь на коллективном опыте. PSO, в свою очередь, позволяет индивидуальным "частицам" (траекториям) двигаться в сторону "глобальных оптимумов", выявленных роем, что способствует распространению лучших практик [18].

Таким образом, концепция математической сингулярности служит теоретическим мостом между сложным, нелинейным характером образовательных процессов и мощным адаптивным потенциалом роевого интеллекта, предлагая новую парадигму для динамического и персонализированного проектирования учебных траекторий.

2.2. Роевой интеллект как парадигма проектирования образовательных траекторий

Децентрализованная адаптация учебных материалов и методов: в рамках парадигмы роевого интеллекта, студенты рассматриваются как "агенты", а учебные модули, курсы или ресурсы – как "узлы" в сети знаний. Вместо жестко заданной программы, траектория обучения формируется через локальные взаимодействия студента с учебным контентом, его обратную связь, а также на основе коллективного опыта других учащихся. Это позволяет системе децентрализованно адаптироваться к индивидуальным потребностям каждого студента, не требуя централизованного программирования каждого возможного пути [22].

Формирование образовательных траекторий через локальные взаимодействия и опыт: Успешное прохождение студентом определенного учебного модуля или достижение компетенции может "оставлять след" (аналог феромона), сигнализирующий о "качестве" или "эффективности" данного пути. Другие студенты могут "чувствовать" эти "следы", отдавая предпочтение тем путям, которые были наиболее успешными для их предшественников или сверстников. Таким образом, образовательные траектории не планируются заранее, а возникают эмерджентно, основываясь на постоянно обновляемом коллективном опыте и предпочтениях [4].

Эмерджентное выявление "лучших практик" и "сингулярных" точек роста: Коллективное поведение "роя" студентов позволяет выявлять наиболее эффективные и оптимальные пути обучения, которые могут быть неочевидны при индивидуальном подходе. Система может спонтанно обнаруживать "сингулярные" точки, где происходит резкий скачок в усвоении знаний, и активно направлять к ним учащихся, используя коллективно накопленный "интеллект" [15]. Например, если группа студентов, достигших высоких результатов, проходила определенную последовательность модулей, роевой алгоритм может усилить эту последовательность как оптимальную траекторию.

Динамическая реконфигурация и устойчивость: Образовательная среда постоянно меняется – появляются новые материалы, меняются требования, у студентов возникают новые потребности. Роевые алгоритмы позволяют системе быть динамичной и устойчивой к таким изменениям. В случае, если какой-либо путь становится менее эффективным (например, устаревание информации), "феромон" на нем будет уменьшаться, и система естественным образом "перестроит" траектории, направляя студентов к более актуальным и продуктивным маршрутам [10, 15].

Таким образом, роевой интеллект предоставляет мощный инструментарий для создания адаптивных образовательных систем, которые способны самоорганизовываться, обучаться на коллективном опыте и динамически реагировать на индивидуальные потребности каждого учащегося, что является фундаментальным шагом к по-настоящему персонализированному и эффективному обучению.

2.3. Алгоритм оптимизации муравьиной колонии (АСО) для построения образовательных траекторий

Алгоритм оптимизации муравьиной колонии (Ant Colony Optimization, ACO) – это метаэвристический алгоритм, вдохновленный поведением реальных муравьев в поисках пищи [4]. В своей основе АСО имитирует способность муравьев находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и обратно. Это поведение основано на непрямой коммуникации между муравьями посредством химических веществ, называемых феромонами.

Основные принципы работы АСО следующие:

1. Поиск пути: Каждый "виртуальный муравей" начинает свое движение от начальной точки (муравейник) и случайным образом выбирает следующий шаг (ребро) на графе (представляющем собой возможные пути) до тех пор, пока не достигнет конечной точки (источник пищи).

2. Выделение феромона: По мере прохождения пути, каждый муравей оставляет на пройденных ребрах определенное количество феромона. Чем короче и успешнее путь, тем больше феромона на нем оставляется.

3. Испарение феромона: Со временем феромон на ребрах испаряется. Это предотвращает бесконечное накопление феромона на неоптимальных путях и позволяет системе "забывать" менее эффективные решения.

4. Вероятностный выбор пути: Следующие муравьи выбирают свой путь, ориентируясь на концентрацию феромона на ребрах. Чем выше концентрация феромона на ребре, тем выше вероятность, что следующий муравей выберет этот путь. Это приводит к положительной обратной связи: чем больше муравьев выбирают успешный путь, тем больше феромона на нем накапливается, и тем привлекательнее он становится для последующих муравьев.

5. Эмерджентное поведение: в результате многократных итераций и взаимодействий отдельных муравьев, на самых коротких и эффективных путях накапливается наибольшее количество феромона. Это приводит к тому, что большинство муравьев начинает следовать по этим оптимальным траекториям, демонстрируя эмерджентную способность колонии находить наилучшее решение без централизованного управления [4, 15].

Для применения принципов АСО в контексте проектирования адаптивных образовательных траекторий, необходимо определить соответствие между элементами алгоритма и сущностями образовательного процесса:

Муравей (k): в нашей модели "муравей" представляет обучающегося (студента). Каждый студент (или группа студентов с аналогичными характеристиками) является агентом, который ищет свою оптимальную образовательную траекторию.

Граф ($G=(V, E)$): Образовательный процесс моделируется как ориентированный граф, где:

Вершины (V): Обозначают учебные модули, темы, курсы, компетенции или другие дискретные единицы учебного контента. Каждая вершина может иметь связанные с ней

характеристики (например, сложность, длительность, необходимые предварительные знания).

Ребра (E): Обозначают возможные переходы между учебными модулями или компетенциями. Ребро e_{ij} соединяет вершину i с вершиной j , указывая на возможность перехода от изучения модуля i к модулю j .

Феромон (τ_{ij}): "Феромон" на ребре e_{ij} представляет собой метрику "эффективности" или "привлекательности" перехода от модуля i к модулю j . Это может быть агрегированный показатель, отражающий:

Успеваемость: Средний балл студентов, прошедших этот переход.

Время прохождения: Среднее время, затраченное успешными студентами.

Вовлеченность: Показатели активности и мотивации студентов на данном пути.

Актуальность: Насколько данный переход соответствует современным требованиям и тенденциям.

Обратная связь: Положительные отзывы студентов о последовательности модулей. Накопление феромона на ребре e_{ij} указывает на то, что переход от модуля i к модулю j является частью успешных и оптимальных траекторий, пройденных предыдущими "муравьями" (студентами).

Математическая формализация АСО:

Формула обновления феромона: Включите формулу, как было предложено ранее, и объясните каждую переменную в контексте образования.

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho)\tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t)$$

$\tau_{ij}(t)$: "Привлекательность" или "эффективность" перехода от модуля i к модулю j в момент времени t . Высокое значение указывает на то, что многие успешные студенты выбрали этот путь.

ρ : Скорость "испарения" феромона. Это позволяет учитывать устаревание информации или изменение требований. (Например, старые, менее релевантные пути со временем теряют свою "привлекательность").

$\Delta\tau_{ij}^k(t)$: Количество "феромона", оставленного "студентом" k на пути (i, j) . Это может зависеть от его успехов (например, высокий балл, быстрое освоение) или позитивной обратной связи.

Результаты исследования

Образовательные учреждения, как и физические или биологические системы, обладают сложной структурой, характеризующейся взаимодействием множества элементов: студентов, преподавателей, учебных программ, инфраструктуры и технологий. При этом образовательный процесс является нелинейным и часто подвержен внешним воздействиям (например, внедрению цифровых технологий, изменениям образовательных политик, социально-экономическим сдвигам). В этом контексте можно выделить следующие аналогии:

Критические точки развития: Аналогично тому, как математическая сингулярность сигнализирует о резком переходе системы в новую фазу, образовательная система может переживать моменты резкой трансформации (например, внедрение дистанционного обучения или цифровых платформ), после которых изменяются базовые принципы организации учебного процесса.

Нелинейность и чувствительность к начальным условиям: В образовательных учреждениях малейшие изменения в организации процессов, использовании технологий или педагогических методах могут привести к значительным эффектам в долгосрочной перспективе.

Переходные явления: Момент внедрения инновационных образовательных технологий можно интерпретировать как аналог сингулярного состояния, после которого традиционные модели обучения устаревают, уступая место новым подходам, требующим переосмысления как методологии преподавания, так и системы оценки знаний.

Моделирование образовательных систем с использованием идеи сингулярности

Применение концепции математической сингулярности в образовательных системах может осуществляться посредством следующих направлений:

Анализ динамики образовательного процесса: Использование математических моделей, основанных на нелинейных уравнениях, позволяет выявлять точки критического перехода, когда изменения в образовательной политике или технологии приводят к резкому изменению характеристик системы. Такие модели могут применяться для прогнозирования эффективности реформ или внедрения новых образовательных технологий.

Оптимизация стратегий развития: Математический анализ сингулярных точек способствует идентификации пороговых значений, при достижении которых наблюдаются значимые улучшения или ухудшения в качестве образования. Это позволяет принимать обоснованные управленческие решения, направленные на минимизацию негативных эффектов и максимизацию позитивных изменений.

Разработка адаптивных систем обучения: В условиях динамично изменяющейся образовательной среды концепция сингулярности может служить основой для создания адаптивных образовательных систем, которые реагируют на резкие изменения в показателях успеваемости или вовлеченности студентов. Применение методов анализа критических точек способствует разработке систем, способных корректировать учебный процесс в режиме реального времени.

Практическое применение в образовательных учреждениях

На практике применение идей математической сингулярности в образовательных учреждениях может иметь следующие направления:

Внедрение систем образовательной аналитики: Современные образовательные платформы, оснащенные инструментами анализа данных, способны выявлять критические изменения в показателях успеваемости и вовлеченности студентов. Обнаружение «сингулярных» моментов позволяет оперативно корректировать учебные программы и методы преподавания.

Моделирование процессов инноваций: При планировании реформ и внедрении новых технологий важно учитывать возможность резких изменений в системе. Применение математических моделей помогает предсказать, когда система может столкнуться с критическим переходом, что позволяет заранее разрабатывать стратегии адаптации и поддержки.

Обучение и повышение квалификации педагогических кадров: Введение концепции сингулярности в анализ образовательных процессов может стать основой для формирования новых образовательных программ, направленных на подготовку специалистов, способных работать в условиях динамичных изменений. Понимание критических точек позволяет разработать курсы, ориентированные на развитие адаптивного мышления и способности оперативно реагировать на изменения.

Применение в управлении образовательными учреждениями: Административные структуры могут использовать аналитические методы для выявления проблемных зон в организации учебного процесса. Прогнозирование сингулярных точек помогает

своевременно принимать меры по улучшению образовательного климата, оптимизации распределения ресурсов и повышению качества предоставляемых услуг.

Применение математической сингулярности в контексте образовательных систем представляет собой перспективное направление, способное обеспечить более глубокий анализ и прогнозирование динамики образовательного процесса. Несмотря на то, что непосредственно математическая модель сингулярности требует адаптации к специфике социальных и педагогических процессов, её концептуальные принципы позволяют выявлять критические точки, оказывающие существенное влияние на качество образования. Внедрение подобных аналитических подходов может способствовать оптимизации управленческих решений, разработке адаптивных образовательных программ и формированию устойчивых систем образования, способных эффективно реагировать на вызовы современности.

Обсуждение

Предложенный подход к применению математической сингулярности и алгоритмов роевого интеллекта в образовательных системах открывает новые перспективы для персонализации обучения и адаптации учебных траекторий. Однако его внедрение требует критического анализа как теоретических основ, так и практических ограничений.

Идея заимствования принципов роевого интеллекта из биологических систем для моделирования образовательных процессов согласуется с современными тенденциями в области искусственного интеллекта и анализа данных. Работы, посвященные применению муравьиных алгоритмов и методов роя частиц в образовании, подтверждают потенциал таких подходов для оптимизации учебных маршрутов. Однако введение концепции математической сингулярности добавляет новый уровень анализа, позволяя идентифицировать критические точки перехода от хаотического к структурированному поведению системы. Это создаёт основу для прогнозирования качественных изменений в образовательных процессах, что ранее не было полноценно исследовано.

Практические преимущества и ограничения. Основное преимущество предложенной модели — её способность динамически адаптироваться к меняющимся условиям, используя коллективный опыт учащихся. Например, алгоритм АСО, имитирующий феромонные следы, может эффективно направлять студентов по наиболее успешным траекториям, минимизируя время на поиск оптимальных решений. Тем не менее, существуют риски, связанные с чрезмерной стандартизацией: система может игнорировать уникальные потребности отдельных учащихся, если "феромоны" будут отражать лишь усреднённые паттерны. Кроме того, внедрение таких алгоритмов требует значительных вычислительных ресурсов и инфраструктуры для сбора и обработки данных в реальном времени, что может быть недоступно для многих образовательных учреждений.

Этические и социальные аспекты. Использование данных учащихся для построения адаптивных траекторий поднимает вопросы о конфиденциальности и прозрачности алгоритмов. Необходимо обеспечить защиту персональной информации и исключить возможность манипуляций со стороны третьих лиц. Кроме того, существует риск снижения роли педагога в учебном процессе, если система будет полностью автономной. Важно сохранить баланс между технологической эффективностью и человекоцентричным подходом, где алгоритмы выступают инструментом поддержки, а не заменой преподавателей.

Сравнение с альтернативными методами. В отличие от традиционных систем LMS (Learning Management Systems), которые часто следуют жёстким алгоритмам, роевые методы предлагают более гибкую и самоорганизующуюся среду. Однако их эффективность в сравнении с нейросетевыми моделями, такими как GPT или трансформеры, требует дополнительного изучения. Например, нейросети лучше справляются с обработкой неструктурированных данных, тогда как роевые алгоритмы эффективны в задачах оптимизации с чёткими параметрами. Комбинирование этих подходов могло бы усилить преимущества каждого из них.

Направления для будущих исследований:

1. Валидация моделей: Проведение экспериментов в реальных образовательных учреждениях для проверки гипотез о влиянии сингулярности на динамику обучения.
2. Разработка гибридных систем: Интеграция роевых алгоритмов с нейросетевыми архитектурами для обработки разнородных данных.
3. Этика ИИ в образовании: Исследование долгосрочных социальных последствий автоматизации учебных процессов
4. Масштабируемость: Адаптация методов для работы в условиях ограниченных ресурсов, характерных для развивающихся стран.

Заключение

Анализ применения концепции математической сингулярности в образовательных системах позволяет выявить несколько ключевых аспектов, способствующих глубокому пониманию и модернизации процессов обучения. В основе представленного исследования лежит идея, что критические точки, аналогичные сингулярностям в математических моделях, могут служить индикаторами резких качественных изменений в образовательном процессе, что отражает переход от традиционных моделей к инновационным адаптивным системам.

Прежде всего, выявлено, что сингулярные моменты в динамике образовательных систем могут выступать маркерами, сигнализирующими о наступлении этапа структурной трансформации. Такой подход позволяет более точно прогнозировать и своевременно корректировать стратегии развития образовательных учреждений. Например, применение алгоритмов, основанных на принципах роевого интеллекта, демонстрирует, что локальные изменения (подобные изменения показателей успеваемости отдельных студентов) могут приводить к глобально оптимальным решениям, что аналогично феномену накопления феромонных следов в алгоритме муравьиной колонии.

Вторым важным аспектом является возможность интеграции методов математического анализа сингулярностей в систему образовательной аналитики. Использование нелинейных уравнений для моделирования образовательного процесса позволяет не только обнаруживать критические пороговые значения, но и оценивать чувствительность системы к внешним и внутренним возмущениям. Это имеет практическое значение для разработки адаптивных образовательных траекторий, где оперативная реакция на резкие изменения в учебном процессе может существенно повысить качество и эффективность обучения.

Следует отметить, что применение сингулярных моделей в образовательном контексте требует междисциплинарного подхода. С одной стороны, необходимо учитывать специфику педагогических процессов, характерную для социальных систем, а с другой – применять строгие математические методы, разработанные для анализа сложных динамических систем. Таким образом, исследование указывает на потенциал

интеграции идей математической сингулярности в практику управления образовательными учреждениями, что позволит разрабатывать инновационные решения для оптимизации учебных процессов и формирования самоорганизующихся образовательных экосистем.

Также обнаружены технологические и этические аспекты внедрения таких методов. С одной стороны, использование алгоритмов роевого интеллекта и методов анализа критических точек требует высокой вычислительной мощности и наличия надежных источников данных, что обуславливает необходимость инвестиций в развитие инфраструктуры образовательных платформ. С другой стороны, вопросы прозрачности и воспроизводимости результатов остаются важными для обеспечения доверия к применяемым моделям и корректного интерпретирования выявленных сингулярных состояний.

Наконец, перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой более сложных моделей, учитывающих многофакторность образовательного процесса. Разработка гибридных моделей, объединяющих классические подходы и современные алгоритмы искусственного интеллекта, позволит создать системы, способные в режиме реального времени адаптироваться к изменяющимся образовательным потребностям. Такой междисциплинарный подход имеет потенциал не только для совершенствования методологии анализа образовательных данных, но и для формирования новых концепций в области организации учебного процесса.

Таким образом, применение концепции математической сингулярности в образовательных системах представляет собой перспективное направление, способное значительно расширить возможности анализа и управления образовательными процессами. Внедрение данных методов может способствовать повышению эффективности адаптивных систем обучения, что, в свою очередь, положительно скажется на качестве образования в условиях динамично изменяющейся информационной среды.

Литература:

1. Altshuler, Y. (2023). Recent Developments in the Theory and Applicability of Swarm Search. *Entropy*, 25(5), 710.
2. Abraham, A., Guo, H., & Liu, H. (2006). Swarm Intelligence: Foundations, Perspectives and Applications. In *Swarm Intelligence: Foundations, Perspectives and Applications* (pp. 23-42). Springer Berlin Heidelberg.
3. Ahmed, H.R., & Glasgow, J.I. (2012). *Swarm Intelligence: Concepts, Models and Applications*.
4. Cardona, M.A., Rodríguez, R.J., & Ishmael, K. (2023). Artificial Intelligence and the Future of Teaching and Learning: Insights and Recommendations. U.S. Department of Education, Office of Educational Technology.
5. Chibaya, C., & Bhero, E. (2023). A survey of inspiring swarm intelligence models for the design of a swarm-based ontology for addressing the cyber security problem. *International Journal of Research In Business and Social Science*, 11(6), 1-13.
6. Computational Complexity (The specific authors and title of the work from which this excerpt is taken are not clearly identifiable in the provided material).
7. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., & Stein, C. (2001). *Introduction to Algorithms* (2nd ed.). MIT Press.
8. Darlington, J.P.E.C. (1982). The underground passages and storage pits using in foraging by a nest of the termite *Macrotermes michaelseni* in Kajiado, Kenya. *Journal of Zoology*, London, 198(2), 237–247.
9. Darwin, C. (1872). *The origin of species* (6th ed.). John Murray, London.

10. Deneubourg, J.-L., Aron, S., Goss, S., Pasteels, J.M., & Duerinck, G. (1986). Random behaviour, amplification processes and number of participants: how they contribute to the foraging properties of ants. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 22(1-3), 176–186.
11. Doerr, B., & Johannsen, D. (2010). Edge-based representation beats vertex-based representation in shortest path problems. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO '10)* (pp. 759–766). ACM Press.
12. Doerr, B., & Theile, M. (2009). Improved analysis methods for crossover-based algorithms. In *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO '09)* (pp. 247–254). ACM Press.
13. Excerpts from "!!! from-animal-collective-behaviors-to-swarm-robotic-84dsxa35.pdf" (The full bibliographic details are provided within the document itself as: *Natl Sci Rev*, 2023, Vol. 10, nwad040, Downloaded from <https://academic.oup.com/nsr/article/10/5/nwad040/7043485> by guest on 01 October 2023).
14. Excerpts from "01.pdf" (The full bibliographic details are: *International Journal of Research in Business and Social Science* (2147-4478), © 2023 by the authors. Licensee SSBFNET, Istanbul, Turkey. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)).
15. Excerpts from "06.pdf" (The full bibliographic details are: *Entropy* 2023, 25, 710. <https://doi.org/10.3390/e25050710>).
16. Excerpts from "08.pdf" (This excerpt references several works by Bruce J. MacLennan and others, making it difficult to cite as a single entity. Some referenced works include: MacLennan, B.J. (2014). Coordinating massive robot swarms. *International Journal of Robotics Applications and Technologies*, 2(2), 1–19; MacLennan, B.J. (2015). The morphogenetic path to programmable matter. *Proceedings of the IEEE*, 103(7), 1226–1232; MacLennan, B.J. (2018). Coordinating swarms of microscopic agents to assemble complex structures. In *Swarm Intelligence*, Vol. 1: Principles, Current Algorithms and Methods (pp. 583–612). Institution of Engineering and Technology.).
17. Excerpts from "09.pdf" (This appears to be an internal report supported by NASA, the specific citation details are not fully present in the excerpt).
18. Excerpts from "15.pdf" (This excerpt contains references to various works in swarm intelligence and related fields, making it challenging to cite as a single source. Examples include: Kennedy J., Eberhardt R. (1995) Particle swarm optimization, *Proc. IEEE Int. Conf. Neural Network*, 1942-1948; Weber H. (1974) *Grundrißder Insektenkunde*, Gutav Fischer Verlag, Stuttgart.).

Information about the authors:

Kopnova O.L. – corresponding author, Senior Lecturer, Department of Mathematics and Physics, PhD, Academician of the International Academy of Informatization, Department of Mathematics and Physics, Manash Kozybayev North Kazakhstan University NPLC, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: oksanakopnova@gmail.com;

Tajigitov A.A. – Head of the Department of Mathematics and Physics, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Manash Kozybayev North Kazakhstan University NPLC, Petropavlovsk, Kazakhstan; e-mail: askartadzhigitov@mail.ru;

Grigorenko O.V. – Head of the Department of Postgraduate and Doctoral Studies, Siberian State University of Geosystems and Technologies, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Novosibirsk, Russia; e-mail: ogrigorenko2311@mail.ru.