DOI 10.54596/2958-0048-2023-4-70-77
ӘОЖ 372.851
ҒТАМА 27.21.15

МЕКТЕП ГЕОМЕТРИЯ КУРСЫНДА ВЕКТОРЛЫҚ ӘДІСТІ ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕЛІК ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Тлеужанов А.Б.[1*], Тойбазаров Д.Б.[1]
[1]Жансүгіров атындағы Жетісу университеті, Жаратылыстану жоғары мектебі, Талдықорған, Қазақстан Республикасы*
[*]E-mail: tleuzanovalibek@gmail.com

Аңдатпа

Мақалада мектеп геометрия курсын оқыту барысында «векторлық әдістерді» оқытудың негізгі әдістемелік ерекшеліктері баяндалады. Оқушылардың векторлық әдісті меңгерудің тиімділігін арттыру үшін, векторлық әдіс пен координаталық әдістер арасындағы байланыстарға талдау жасалды. Мектеп курсында қарастырылатын вектор сабақтарының көлемдері көрсетіле отырып, векторлық әдісті қолдана алгебралық және геометриялық есептерді шығаруға мысалдар қарастырылды. Векторлық әдістің даму тарихына қысқаша шолу жасалды.

Мақала студенттерге, мектеп мұғалімдеріне, әдіскерлерге, барша қызығушыларға ұсынылады.

Кілт сөздер: вектор, векторлық және координаталық әдіс, векторлық кеңістік, сызықтық алгебра, аффиндік есептер.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Тлеужанов А.Б.[1*], Тойбазаров Д.Б.[1]
[1]Жетысуский университет имени И. Жансугирова, Высшая школа естественных наук, Талдыкорган, Республика Казахстан
[*]E-mail: tleuzanovalibek@gmail.com

Аннотация

В данной статье рассматриваются основные методические аспекты преподавания "векторных методов" в рамках школьного курса геометрии. С содействием анализа взаимосвязей между векторным и координатным методами стремится повысить эффективность обучения студентов векторному подходу. Приведены примеры решения алгебраических и геометрических задач с использованием векторного метода, демонстрируя объем учебного материала, представленного в школьном курсе. Также представлен краткий обзор истории развития векторного метода.

Статья рекомендуется студентам, учителям школ, методистам и всем заинтересованным лицам.

Ключевые слова: вектор, векторно-координатный метод, векторное пространство, линейная алгебра, аффинные задачи.

METHODOLOGICAL FEATURES OF TEACHING THE VECTOR METHOD IN A SCHOOL GEOMETRY COURSE

Tleuzhanov A.B.[1*] **Toybazarov D.B.**[1]
[1*]*Zhetysu University named after I. Zhansugirov, Higher School of Natural Sciences,*
[1*]*Taldykorgan, Republic of Kazakhstan*
[*]*E-mail: tleuzanovalibek@gmail.com*

Abstract

The article describes the main methodological features of teaching “vector methods” in a school geometry course. In order to increase the efficiency of teaching students the vector method, the connections between the vector method and coordinate methods are analyzed. Examples of solving algebraic and geometric problems using the vector method were shown, showing the scope of vector studies covered in the school course. A brief overview of the history of the development of the vector method is given. The article is recommended for students, school teachers, methodologists and all interested parties.

Key words: vector, vector-coordinate method, vector space, linear algebra, affine problems.

Кіріспе

Университет курстарында векторды енгізу әдетте векторлық (сызықтық) кеңістік жағдайында аксиоматикалық түрде жүзеге асырылады. Осы курстарды оқуға дайындалу үшін мектеп математикасында функционалдық деңгейде векторлармен жұмыс істеу тәжірибесін алу, есептерді шешуде векторларды пайдалану дағдыларын меңгеру өте маңызды. Бұл үшін мектептегі геометрия курсы кең мүмкіндіктер береді. Біріншіден, вектор көбінесе мектеп оқулықтарының көпшілігінде бағытталған сызық кесіндісі ретінде геометриялық түрде анықталады. Бұл тәжірибе көрсеткендей, кез келген математикалық ұғыммен алғаш әрекеттесу кезінде үлкен мәнге ие болатын «вектор» ұғымының және векторлармен операциялардың қарапайым және көрнекі түсіндірмелерін беруге мүмкіндік береді. Екіншіден, басқа әдістермен салыстырғанда векторларды пайдалану оңайырақ және әмбебап түрде шешілетін (немесе дәлелденетін) көптеген геометриялық есептер (теоремалар) бар.

Геометрия сабақтарында геометриялық есептерді шешудің векторлық әдісі мен координаталық әдіс арасындағы байланыс атап өтіледі. Бір қызығы, координаталық әдіспен шешілетін геометриялық есептің векторлық әдіс бойынша шешімі ұқсас болады және өз кезегінде есептің кез келген векторлық шешімі координаталық түрде өрнектелуі мүмкін.

Материалдар мен әдістер

Жазықтықтағы координаттар жүйесімен таныстыру мектеп математика курсының бастапқы сыныптарында шамамен 5-6 сынып деңгейінде болады. Негізгі мектептегі алгебра курсының бөлігі ретінде жазықтықтағы координаттар жүйесі функциялар мен олардың қасиеттерін зерттеуге, теңдеулер мен теңсіздіктерді графикалық шешуге арналған маңызды құрал мәртебесін алады. Алгебрада және анализ бастамаларында бұл координаттар жүйесі туындыларды, интегралдар мен олардың қосымшаларын зерттеуде әмбебап құралға айналады. Бұл курстарда Ох және Оу координаталар осьтерінде бірдей ұзындық бірліктері бар Оху тікбұрышты координаталар жүйесі қолданылады. Мұндай координаталар жүйесі планиметрияда да бар және мұнда координаталар векторлары ортогональ және бірлік ұзындығы болады. Стереометрияны зерттегенде тек тікбұрышты координаттар жүйесі де кеңінен қолданылады.

Фигураның геометриялық қасиеттері оны зерттеу үшін таңдалған координаталар жүйесіне қарамастан өзгермейтінін ескеру керек. Осыған байланысты координаталық әдісті қолданғанда фигураның геометриялық сипаттамалары әдетте оның инварианттары деп аталады. Барлық сценарийлерге сәйкес келетін зерттелетін фигураның координаттар жүйесін таңдау бойынша әмбебап ұсыныстар беру мүмкін емес сияқты. Координаталар жүйесін оңтайлы таңдау дағдысы үлкен тәжірибе мен зерттеушілік қабілеттерді талап етеді.

«Вектор» термині алғаш рет ғылыми әдебиеттерде 19 ғасырдың ортасында көрнекті математиктер Г. Грассман мен ирландиялық У. Гамильтонның еңбектерінде пайда болды. Векторлық есептеуге оның заманауи келбетін 19 ғасырдың аяғында американдық физик Д.В. Гиббс пен ағылшын физигі О. Хевисайд берді. 20 ғасырдың басында векторлар математика мен физиканың әртүрлі салаларында интегралды зерттеу құралы болды.

Геометрияда 1918 жылы шыққан неміс математигі Г. Вейлдің «Кеңістік, уақыт, материя» кітабы векторлық формализмнің дамуына айтарлықтай әсер етті. Бұл жұмыстың кіріспе тарауында «нүкте» және «вектор» ұғымдарына негізделген евклид геометриясының аксиоматикасы берілген және олардың арасындағы байланыс векторды нүктеден кейінге қалдыру операциясы арқылы орнатылады. Вейл тәсілі таңғажайып өнімді болып шықты, ол минималды өзгертулермен әртүрлі евклидтік емес геометриялар мен олардың көп өлшемді жалпылаулары үшін аксиоматиканы құруға мүмкіндік берді.

1940 жылдары векторлық алгебра кеңестік жоғары математикалық білім берудің білім беру бағдарламасының міндетті компоненті мәртебесіне ие болды. Содан кейін 1960 жылдары векторлар бірінші рет орта мектептегі геометрия курстарына енгізілді.

Сандар мен әріптік өрнектер сияқты векторлар да қосу және алу, векторды санға көбейту және векторларды скалярлық көбейту сияқты алгебралық операцияларға бағынады. Сонымен, белгілі бір амалдармен жүретін векторлар жиыны алгебраны құрайды, оны векторлық алгебра деп атайды. Бұл алгебра өзінің мәні бойынша дәстүрлі мектеп алгебрасына қарағанда геометрияға жақынырақ, өйткені векторлар да, олармен орындалатын амалдар да геометриялық түсініктерге негізделген. Сондықтан векторлық алгебраны қолдану геометриялық есептерді шешудің жаңа, әмбебап әдісін береді деген үміт ақталды.

Векторлық әдістің негізгі идеясы, кез келген алгебралық тәсіл сияқты, геометриялық есептің шарттары мен қалаған нәтиже алдымен алгебралық тілде, бұл жағдайда векторлық алгебраны қолдану арқылы өрнектеледі. Нәтижесінде есептің векторлық моделі құрылады. Геометриялық есептерді векторлық әдіс арқылы тиімді шешу үшін векторлардың көмегімен негізгі геометриялық объектілерді бейнелеу және олардың арасындағы негізгі байланыстарды векторлық алгебра тілінде сипаттау дағдысын меңгеру қажет.

Ең бастысы - геометриялық объектілерді және олардың байланыстарын алгебралық векторлық өрнектерге түрлендіру мүмкіндігі. Дегенмен, кері процесс - алгебралық векторлық қатынастарды геометриялық объектілерге және олардың қатынастарына қайта түсіндіру мүмкіндігі бірдей маңызды. Осылайша, алгебралық векторлық қатынастардың геометриялық интерпретациясын құру дағдыларын меңгеру геометриялық есептерді шешуде векторлық әдісті сәтті қолданудың құрамдас бөлігіне айналады.

Мектептегі геометрия курсында векторларды оқыту әдістемесі
9-сыныпта «ВЕКТОРЛАР» тарауын оқыту:

№	Оқу материалының мазмұны	Сағ. саны
2. Жазықтықтағы векторлар		16
1.	Вектор ұғымы. Коллинеар векторлар. Вектордың ұзындығы (модулі) және бағыты. Векторлардың теңдігі.	1
2.	Векторларды қосу және оның қасиеттері. Векторларды азайту.	2
3.	Векторды санға көбейту. Векторлардың коллинеарлық критерийі. Векторды санға көбейтудің қасиеттері.	2
4.	Жазықтықтағы векторды екі коллинеар емес векторлар бойынша жіктеу.	1
5.	Тікбұрышты координаталар жүйесіндегі векторлар. Вектордың координаталары.	2
6.	Векторлардың арасындағы бұрыш. Вектордың координаталық осьтердегі проекциялары.	1
7.	Векторлардың скалярлық көбейтіндісі.	2
8.	Тікбұрышты координаталар жүйесінде түзудің әртүрлі берілу тәсілдері.	2
9.	Есептерді шешуде векторларды қолдану.	2
10.	Жиынтық бағалау.	1

[7]

Жаратылыстану-математикалық бағыттағы 10 сынып геометрия курсының күнтізбелік-тақырыптық жоспарынан үзінді:

№	Оқу материалының мазмұны	Сағ. саны
5. Кеңістіктегі координаталар және векторлар		17
1.	Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі. Кесіндінің ортасының координаталары. Екі нүктенің арақашықтығы.	2
2.	Кеңістіктік геометриялық фигуралардың теңдеулермен және теңсіздіктермен берілуі. Жазықтықтың теңдеуі.	3
3.	5-бақылау жұмысы.	1
4.	Кеңістіктегі векторлар. Компланар және компланар емес векторлар. Векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу.	3
5.	Кеңістіктегі вектордың координаталары. Координаталары берілген векторларға амалдар қолдану.	2
6.	Координаталары берілген векторлардың скалярлық көбейтіндісі. Векторлардың скалярлық көбейтіндісінің қасиеттері.	2
7.	Есептерді шешуде векторларды қолдану.	3
8.	Жиынтық бағалау.	1

[7]

Қоғамдық-гуманитарлық бағыттағы 10-сынып геометрия курсының күнтізбелік-тақырыптық жоспарынан үзінді:

№	Оқу материалының мазмұны	Сағ. саны
4. Кеңістіктегі координаталар және векторлар		9
1.	Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі. Кесіндінің ортасының координаталары. Екі нүктенің арақашықтығы.	2
2.	Кеңістіктегі векторлар. Компланар және компланар емес векторлар. Векторды үш компланар емес векторлар бойынша жіктеу.	2
3.	Кеңістіктегі вектордың координаталары. Координаталары берілген векторларға амалдар қолдану.	1
4.	Координаталары берілген векторлардың скалярлық көбейтіндісі.	1
5.	Есептерді шешуде векторларды қолдану.	2
6.	Жиынтық бағалау.	1

[7]

Нәтижелер мен талқылау

Геометриялық және алгебралық есептерді шығаруда векторларды қолдану

1-есеп. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $(a, b , c , d \geq 0)$ теңсіздігін дәлелдеңдер.

Стандарт тәсіл бойынша шығару	Векторлық әдіспен шығару
Берілген теңсіздіктің екі жағы да оң, сондықтан оның екі жағын да квадраттап мынаны аламыз: $(a+c)(b+d) \geq ab+cd+2\sqrt{abcd}$, $ab+ad+bc+cd \geq ab+cd+2\sqrt{abcd}$, $bc+ad \geq 2\sqrt{abcd}$, $\frac{bc+ad}{2} \geq \sqrt{(ab)(cd)}$, болады. Егер $bc=p, ad=q$ деп белгілесек, онда $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$. Коши теңсіздігі деп аталатын ақиқат теңсіздік шығады. Олай болса берілген теңсіздікте ақиқат болады.	Берілген теңсіздікті $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} \leq \sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+d}$ түрінде жазып алып, $\vec{u}=(\sqrt{a}\,;\sqrt{c}\,)$ және $\vec{v}=(\sqrt{b}\,;\sqrt{d}\,)$ векторларын енгіземіз. Сонда бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, ал сәйкесінше ұзындықтары $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{a+c}$ және $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{b+d}$ болады. Алынған теңсіздіктерді $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert$ белгілі теңсіздігіне қоятын болсақ, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+d}$ теңсіздігі орындалады.

2-есеп. $5sinx-12cosx$ өрнегінің ең үлкен және ең кіші мәндері қандай болады?

Шешуі. $\overrightarrow{a}=(5;\,-12)$ және $\overrightarrow{b}=(sinx;\,cosx)$ векторлары болсын.

Сонда $5sinx-12cosx$ өрнегі осы векторлардың скаляр көбейтіндісі болады: $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=5sinx-12cosx$. $\lvert\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\rvert < \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert$ теңсіздігін ескеріп, $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 \leq \lvert\overrightarrow{a}\rvert^2 - \lvert\overrightarrow{b}\rvert^2$ теңсіздігін аламыз.

Берілген шарт үшін $(5sinx-12cosx)^2 \leq 13^2(sin^2x+cos^2x)$, яғни $(5sinx-12cosx)^2 \leq 13^2$. Осыдан $\lvert 5sinx-12cosx\rvert \leq 13$ немесе $-13 \leq 5sinx-12cosx) \leq 13$. Сонымен, берілген өрнектің ең үлкен мәні 13, ең кіші мәні (-13)-ке тең болады.

3-есеп. Егер $x^2+y^2+z^2=1$,болса, онда $\sqrt{x^4+1}+\sqrt{y^4+1}+\sqrt{z^4+1}\geq\sqrt{10}$, (1) теңсіздігі орындалатынын дәлелдеңдер.

Дәлелдеуі. Жазықтықтағы үш векторды $\vec{a}(x^2;1),\vec{b}(y^2;1)$ және $\vec{c}(z^2;1)$ қарастырайық. Сонда $|\vec{a}|=\sqrt{x^4+1},|\vec{b}|=\sqrt{y^4+1}$ және $|\vec{c}|=\sqrt{z^4+1}$. Егер $|\vec{d}|=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ арқылы жазсақ, онда $|\vec{d}|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2+(1+1+1)^2}=\sqrt{10}$ тең. $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$ (1). Бұл жағдайда (1) теңсіздігі $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|\geq|\vec{d}|$ түріне келеді. Егер берілген теңсіздікке $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ және $|\vec{d}|$ үшін өрнектерді қойсақ, онда (1) теңсіздігі алынады.

4-есеп. Теңдеуді шешіңдер: $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

Шешуі. $\vec{a}(x,1)$ және $\vec{b}(\sqrt{x+1},\sqrt{3-x})$ векторларын енгіземіз. Сонда $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+1},|\vec{b}|=\sqrt{(x+1)+(3-x)}=2$ және формула бойынша $\vec{a}\cdot\vec{b}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$. Берілген теңдеуден $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ теңдігін аламыз, ал бұл $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының коллинеарлығын білдіреді. Олай болса келесі теңдеуді жазамыз:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

Осыдан, $0<x<3$ алынады. Егер теңдеудің екі жағын да квадрат дәрежеге шығарсақ, онда $x^3-3x^2+x+1=0$ алынады, оның түбірлері $x_1=1,x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$ болады. $0<x<3$ болғандықтан, берілген теңдеудің түбірлері $x_1=1$ және $x_2=1+\sqrt{2}$ болады.

5-есеп. $S=3cosx+4sinx$ қосындысының ең үлкен мәнін табыңдар.

Шешуі. $\vec{e}=(cosx;sinx)$ және $\vec{a}=(3;4)$ векторларын енгіземіз. Сонда, $S=3cosx+4sinx=\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{e}})$. $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,|\vec{e}|=\sqrt{sin^2x+cos^2x}=1$. $S=5\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{e}})$. Осыдан $S_{\text{ең үлкен}}=5$.

6-есеп. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{13} \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9}=7. \end{cases} \quad 2)$$

Шешуі. $\vec{a}(x;1),\vec{b}(y;2),\vec{c}(z;3)$ және $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ болсын. Сонда (2) жүйенің бірінші теңдеуін ескерсек, $\vec{s}=(\sqrt{13},6)$ және $|\vec{s}|=\sqrt{13+36}=7$ алынады. Ал, $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+1}$, $|\vec{b}|=\sqrt{y^2+4}$ және $|\vec{c}|=\sqrt{z^2+9}$, онда (2) жүйенің екінші теңдеуінен $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=|\vec{s}|$ шығады, мұндағы $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=|\vec{s}|$ теңдігі, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ және $\vec{s}$ векторларының коллинарлығын анықтайды, яғни $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{\sqrt{13}}{6}$. Бұдан $x_1=\frac{\sqrt{13}}{6}$, $y_1=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $z_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$ табылады.

7-есеп. *ABC* үшбұрышында *M* нүктесі – оның медиаларының қиылысу нүктесі (центроид немесе ауырлық центрі). $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ теңдігі орындалатынын дәлелдеңдер.

Шешуі.

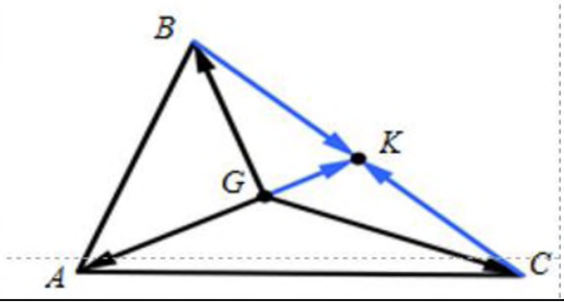
1-тәсіл. $3\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$ екені белгілі, мұндағы X-кеңістіктегі кез келген нүкте. Егер $X=M$ болса, онда $3\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ болады. Демек, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

2-тәсіл. $2\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1}$. Осыған ұқсас, $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}$. Демек, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=0$.

3-тәсіл. $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BM_2}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CM_3}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Демек, . $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{CM_3} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = 0$. Демек, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$

8-есеп. *G* нүктесі – *ABC* үшбұрышының центроиды. $\overrightarrow{GA}$+$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{GC}$=0 екендігін дәлелдеңдер.

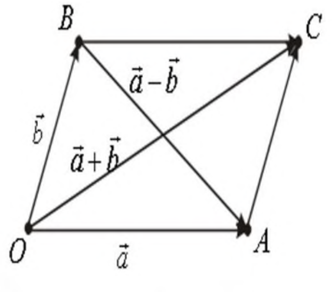
Берілгені	Сызбасы
ΔABC, *G*-центроид Дәлелдеу керек: $\overrightarrow{GA}$+$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{GC}$=0	

Дәлелдеуі. *AK* медианасын жүргіземіз. *G* нүктесі *AK* медианасын *A* нүктесінен бастап санағанда 2:1 қатынасында бөледі.

Сонымен қатар, $\overrightarrow{GA}$ және $\overrightarrow{GK}$ векторлары қарама-қарсы бағытталған. Сонымен, 2$\overrightarrow{GK}$=-$\overrightarrow{GA}$. Басқа жағынан, *GK* кесіндісі – *BCG* үшбұрышының медианасы. 2$\overrightarrow{GK}$ векторын $\overrightarrow{GA}$ және $\overrightarrow{GC}$ векторлары арқылы өрнектейік. $\overrightarrow{GK}$=$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{BK}$ және $\overrightarrow{GK}$=$\overrightarrow{GC}$+$\overrightarrow{CK}$. Осы екі теңдікті мүшелеп қосамыз: $2\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{BK})$. Жақша ішінде жазылған векторлардың қосындысы 0-ге тең, өйткені $\overrightarrow{CK}$=-$\overrightarrow{BK}$. Ендеше, 2$\overrightarrow{GK}$=$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{GC}$. Сондықтан, -$\overrightarrow{GA}$=$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{GC}$ және соңында: $\overrightarrow{GA}$+$\overrightarrow{GB}$+$\overrightarrow{GC}$=0 аламыз. Дәлелдеу керегі де осы болған.

9-есеп. Паралелограммның диогандарының ұзындықтары квадраттарының қосындысы оның барлық қабырғаларының ұзындықтары квадраттарының қосындысына тең болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. *OBCA*–параллелограмм болсын. Егер $\vec{a}$=$\overrightarrow{OA}$ және $\vec{b}$=$\overrightarrow{OB}$ болса, онда $\vec{a}$+$\vec{b}$=$\overrightarrow{OC}$ және $\vec{a}$-$\vec{b}$=$\overrightarrow{AB}$ – оның диагональдарының векторлары болады.



Жеке есептейік: $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = (\vec{a} - \vec{b};\ \vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a},\ \vec{a}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) = \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} - 2(\vec{a}, \vec{b})$,

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} - 2(\vec{a}, \vec{b}), \quad (3)$$

Осыған ұқсас:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} + 2(\vec{a}, \vec{b}), \quad (4)$$

(3) және (4) теңдіктерін мүшелеп қосамыз:

$$(\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{a}+\vec{b})^2=2\overrightarrow{a^2}+2\overrightarrow{b^2}. (5)$$

$|BC|=|OA|=|a^{\rightarrow}|$ және $|AC|=|OB|=|\vec{b}|$ болғандықтан, (5) бойынша:

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=\left(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2\right).$$

Қорытынды

Қорытындылай келе, осы келтірілген әдістемелік ерекшеліктерді пайдалана білу оқушыларда мұғалім қаруландырған белгілі бір білімдердің, біліктері мен дағдыларының болуын талап етеді. Олардың ішіндегі ең маңыздылары мыналар:

I. Геометриялық тілден векторлыққа және керісінше әте білу;

II. Ең маңызды векторлық қатынастар мен олардың ерекшеліктерін білу;

III. Бір векторды басқа векторлар арқылы өрнектей білу;

IV. Векторлық өрнектерді түрлендіре білу.

Әдебиет:

1. Луфт Э.Б. К методике изложения элементов векторного исчисления в средней школе: Дисс. канд. пед. наук. - Алма-Ата, 1968. - 255 с.
2. Толстенков М.С. Внедрение понятия вектора в курс математики средней школы: Дисс. канд. пед. наук. - Барнаул, 1968. - 340 с.
3. Михайлов К.Ф. Элементы векторной алгебры в курсе математики средней школы: Дисс. канд. пед. наук. - Магнитогорск, 1964. - 261 с.
4. Клековкин Г.А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов / Г.А. Клековкин. – Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. – 180 с.
5. Шыныбеков А.Н. Учебник для 9 класса общеобразовательной школы. - Алматы: Атамұра, 2019. - 176 с.
6. Шклярский Д.Ю., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 280 с.
7. https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V1300008424/history

References:

1. Luft E.B. K metodike izlozheniya elementov vektornogo ischisleniya v srednej shkole: - Diss. kand. ped. nauk. - Alma-Ata, 1968. - 255 s.
2. Tolstenkov M.S. Vnedrenie ponyatiya vektora v kurs matematiki srednej shkoly: Diss. kand. ped. nauk. - Barnaul, 1968. - 340 s.
3. Mihajlov K.F. Elementy vektornoj algebry v kurse matematiki srednej shkoly: Diss. kand. ped. nauk. - Magnitogorsk, 1964. - 261 s.
4. Klekovkin G.A. Reshenie geometricheskih zadach vektornym metodom: uchebnoe posobie dlya uchashchihsya 10-11 klassov / G.A. Klekovkin. – Samara: SF GAOU VO MGPU, 2016. – 180 s.
5. Shynybekov A.N. Uchebnik dlya 9 klassa obshcheobrazovatel'noj shkoly. - Almaty: Atamұra, 2019. - 176 s.
6. Shklyarskij D.Yu., CHencov N.N., Yaglom I.M. Izbrannye zadachi i teoremy elementarnoj matematiki. Geometriya (stereometriya). – 3-e izd. – M.: FIZMATLIT, 2000. – 280 s.
7. https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V1300008424/history